TD File d'attente 2

ENSSAT

06/01/2021

Exercice 7

L'objectif de l'exercice est d'étudier directement la file M/M/2 *sans utiliser les résultats du cours sur la file* M/M/n.

Soit N(t) le nombre de clients présents à l'instant t dans une file d'attente comportant 2 serveurs indépendants en parallèle, chacun ayant un temps de service exponentiel de paramètre μ, et telle que les arrivées se font selon un processus de Poisson de taux λ. On suppose que la zone d'attente est de capacité infinie.

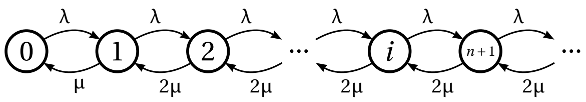
1. Calculer les taux de transition et dessiner le graphe des transitions.
2. Calculer le vecteur de probabilité stationnaire $\boldsymbol{\pi}$. L'exprimer en fonction de $\rho = \dfrac{\lambda}{2\mu}$.
3. Quel est le nombre moyen de clients en régime stationnaire ?
4. Quel est le temps moyen passé dans le système ? le temps moyen de service ? le temps moyen d'attente ? le nombre moyen de clients en attente ?

Corrigé

1. On a déjà déterminé le graphe des transitions pour la file M/M/n, dans la question 2, exercice 6. On ainsi, pour $n = 2$:

$$\forall\ i \in \mathbb{N}, \quad a_{i,i+1} = \lambda$$
$$\forall\ i \geqslant 2, \quad a_{i,i-1} = 2\mu \quad \text{et} \quad a_{1,0} = \mu$$

On obtient le graphe suivant :



2. On commence par l'analyse. On note π le vecteur de probabilité stationnaire. L'étude des PNM nous donne que

$$\forall\ j \geq 1, \quad \pi_j = \pi_0 \prod_{k=1}^{j} \frac{\lambda(k-1)}{\mu(k)}$$

En l'appliquant ici, on obtient :

$$\pi_1 = \pi_0 \frac{\lambda(0)}{\mu(1)} = \pi_0 \frac{\lambda}{\mu}$$
$$\forall\ j \geqslant 2,\ \pi_j = \pi_0 \frac{\lambda}{\mu} \prod_{k=2}^{j} \frac{\lambda}{2\mu}$$

On obtient alors, en notant $\rho = \frac{\lambda}{2\mu}$,

$$\pi_1 = \pi_0 2\rho \quad \text{et} \quad \forall\ j \geqslant 2,\ \pi_j = \pi_0 2\rho\rho^{j-1} = \pi_0 2\rho^j$$

On a donc :

$$\boxed{\forall\ j \geqslant 1,\ \pi_j = \pi_0 2\rho^j}$$

Ce vecteur est un vecteur de probabilité si et seulement si $\sum \pi_j$ converge, c'est-à-dire si et seulement si $\rho < 1$. On obtient alors

$$\pi_0 \left(1 + \sum_{j=1}^{+\infty} 2\rho^j \right) = 1$$

soit

$$\boxed{\pi_0 = \frac{1-\rho}{1+\rho}}$$

Le vecteur de probabilité stationnaire est donc unique.
Pour la synthèse, la distribution stationnaire existe si et seulement si $\rho < 1$. Dans ce cas, ce vecteur vérifie les équations de balance et est donc un vecteur stationnaire.

3. Pour déterminer le nombre moyen de clients en régime stationnaire, il faut calculer $\mathbb{E}[\mathrm{N}_\infty]$, N_∞ étant la variable aléatoire donnant le nombre de clients en régime stationnaire. On a alors :

$$\begin{aligned}
\boxed{\mathbb{E}[\mathrm{N}_\infty]} &= \sum_{j=0}^{\infty} j \mathbb{P}(\mathrm{N}_\infty = j) = \sum_{j=1}^{\infty} j \pi_j \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} j \pi_0 2\rho^j \\
&= \pi_0 2\rho \sum_{j=1}^{\infty} j \rho^{j-1} \\
&= \pi_0 2\rho \frac{1}{(1-\rho)^2} \\
&= \frac{2\rho(1-\rho)}{1+\rho} \frac{1}{(1-\rho)^2} \\
&= \boxed{\frac{2\rho}{1-\rho^2}}
\end{aligned}$$

4. On applique la formule de Little au système, qui est ergodique. On note $\overline{\mathrm{R}}$ le temps moyen passé dans le système en régime stationnaire. Tout d'abord :

$$\overline{\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda(k) \pi_k = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda \pi_k = \lambda$$

La formule de Little nous donne alors

$$\overline{\mathrm{R}} = \frac{\mathbb{E}(\mathrm{N}_\infty)}{\overline{\lambda}}$$

et donc

$$\boxed{\overline{\mathrm{R}} = \frac{1}{\mu(1-\rho^2)}}$$

Le temps moyen de service d'un client est $\frac{1}{\mu}$ (régime transitoire ou stationnaire, loi exponentielle), et on obtient donc le temps moyen passé dans la file d'attente :

$$\boxed{\overline{\mathrm{R}_q} = \overline{\mathrm{R}} - \frac{1}{\mu} = \frac{\rho^2}{\mu(1-\rho^2)}}$$

Enfin, on applique à nouveau la formule de Little au sous-système composé de la zone d'attente et on note N_q le nombre de clients en attente en régime stationnaire (également ergodique). Alors

$$\boxed{\mathbb{E}(\mathrm{N}_q) = \overline{\lambda} \times \overline{\mathrm{R}_q} = \frac{2\rho^3}{1-\rho^2}}$$

On en déduit que le nombre moyen de clients en service en régime stationnaire est :

$$\boxed{\mathbb{E}(N_\infty) - \mathbb{E}(N_q)} = \frac{2(\rho - \rho^3)}{1-\rho^2} = \boxed{2\rho < 2} \quad \text{car } \rho < 1$$

Interprétation. Il est normal de trouver $\mathbb{E}(N_\infty) - \mathbb{E}(N_q) < 2$ puisqu'il y a des **plages d'inactivité de l'espace de service**, composé de 2 serveurs.

La valeur 2ρ trouvée conforte l'interprétation de $\rho = \dfrac{\lambda}{2\mu}$ comme *taux d'activité **global*** de l'espace de service.

Pour la file M/M/n, le rapport entre λ, nombre moyen d'arrivées par unité de temps, et $n\mu$, nombre moyen de clients que peut traiter l'espace de service par unité de temps, est aussi la proportion de temps pendant laquelle au moins 1 serveur fonctionne sur les n, d'où un nombre moyen de clients en service en régime stationnaire égal à $n\rho$.

Exercice 11 - Arrivées par groupes

On considère un médecin dont la spécialité ne concerne que des adultes, consultant sans RDV mais disposant d'une salle d'attente n'ayant que 2 places pour éviter d'être débordé.

À tout instant t peut arriver un groupe constitué de 1 ou 2 patients. Dans le cas d'un couple, ils doivent tous les 2 consulter (sa salle d'attente étant trop petite, le médecin n'accepte pas les accompagnateurs, seulement les patients). Les arrivées de **groupes** se font suivant un processus de Poisson de taux λ. Pour chaque arrivée de groupe, la probabilité que ce soit un patient seul est $p \in]0,1[$, la probabilité que ce soit un couple de patients est $q = 1 - p$, et ceci indépendamment de l'instant d'arrivée.

La contrepartie des consultations sans RDV est que les patients qui arrivent sont priés de revenir plus tard s'ils ne peuvent pas consulter immédiatement ou s'asseoir dans la salle d'attente (interdiction de rester debout dans la salle d'attente). Dans le cas d'un couple, on admet que s'ils ne peuvent pas respecter ces règles, ils repartent tous les deux.

Les consultations sont **individuelles** et leurs durées sont des v.a. indépendantes de loi exponentielle de paramètre μ.

On admet que toutes ces hypothèses impliquent que le processus $(N(t))_{t\geqslant 0}$ représentant le nombre de **patients** dans le cabinet médical à l'instant t est une CMTC (homogène).

1. Déterminer l'espace des états de $(N(t))_{t\geqslant 0}$, calculer les taux de transition instantanée $a_{i,j}$ et dessiner le graphe des taux de transition.
2. Déterminer le vecteur π de probabilité stationnaire associé au processus $(N(t))_{t\geqslant 0}$. *On ne cherchera pas à simplifier les formules.*
3. Quelle est la probabilité qu'un groupe qui arrive en régime stationnaire doive repartir ?
4. Calculer $\mathbb{E}(N_\infty)$, nombre moyen de clients dans le cabinet en régime stationnaire, ainsi que le temps moyen d'attente.

Corrigé

1. Tout d'abord, on constate qu'il y a 4 états possibles : $0, 1, 2$ et 3, car $\mathrm{N}(t)$ compte les patients (2 dans la salle d'attente et 1 dans le cabinet).

   On reprend les notations du poly, et on note $\mathrm{E}_{k,\ell}$ l'évènement "entre t et $t+\delta t$, il y a eu exactement k fins de services parmi les clients en service à l'instant t et exactement ℓ arrivées.". D'après l'énoncé, il ne peut y avoir que 0 ou 1 fin de service (puisque les consultations sont individuelles). En s'inspirant du poly, mais en tenant compte de p et q (et en utilisant l'indépendance des arrivées) :

$$\forall\ i \in \{0,1,2\}, \quad \mathbb{P}(\mathrm{E}_{0,1}|\mathrm{N}(s)=i) = \underbrace{\mathrm{e}^{-\mu\delta t}}_{\text{aucun départ}} \ \underbrace{\mathrm{e}^{-\lambda\delta t}\lambda\delta t}_{\text{une arrivée}} \times \underbrace{p}_{\text{un patient}}$$
$$= p\lambda\delta t + o(\delta t)$$

   donc, pour $i \in \{0,1,2\}$, $a_{i,i+1} = p\lambda$. De même :

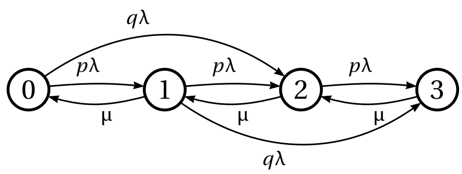
$$\forall\ i \in \{0,1\}, \quad \mathbb{P}(\mathrm{E}_{0,2}|\mathrm{N}(s)=i) = \underbrace{\mathrm{e}^{-\mu\delta t}}_{\text{aucun départ}} \ \underbrace{\mathrm{e}^{-\lambda\delta t}\lambda\delta t}_{\text{une arrivée}} \times \underbrace{q}_{\text{deux patients}}$$
$$= q\lambda\delta t + o(\delta t)$$

   et donc $a_{0,2} = q\lambda$ et $a_{1,3} = q\lambda$ (les autres possibilités étant négligeables). Enfin, puisqu'il y a un seul "serveur", il ne peut y avoir qu'un départ :

$$\forall\ i \in \{1,2\}, \quad \mathbb{P}(\mathrm{E}_{1,0}|\mathrm{N}(s)=i) = \underbrace{\left(1-\mathrm{e}^{-\mu\delta t}\right)}_{\text{un départ}} \underbrace{1}_{\text{aucune arrivée}}$$
$$= \mu\delta t + o(\delta t)$$

   et donc $a_{i,i-1} = \mu$.

   On obtient le graphe des taux de transition suivant :



2. On raisonne à nouveau par analyse et synthèse.

   Analyse. On note $\pi = \begin{pmatrix} \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 \end{pmatrix}$ une distribution stationnaire. En utilisant les équations de balance :

$$\begin{cases} (p\lambda+q\lambda)\pi_0 = & \mu\pi_1 \\ (p\lambda+q\lambda+\mu)\pi_1 = & p\lambda\pi_0+\mu\pi_2 \\ (p\lambda+\mu)\pi_2 = p\lambda\pi_1 + q\lambda\pi_0 + \mu\pi_3 \\ \mu\pi_3 = & p\lambda\pi_2 + q\lambda\pi_1 \end{cases}$$

   soit (puisque $p+q=1$)

$$\begin{cases} \lambda\pi_0 = & \mu\pi_1 \\ (\lambda+\mu)\pi_1 = & p\lambda\pi_0+\mu\pi_2 \\ (p\lambda+\mu)\pi_2 = p\lambda\pi_1 + q\lambda\pi_0 + \mu\pi_3 \\ \mu\pi_3 = & p\lambda\pi_2 + q\lambda\pi_1 \end{cases}$$

   Après résolution, on obtient

$$\boxed{\pi_1 = \frac{\lambda}{\mu}\pi_0, \quad \pi_2 = \left(\frac{\lambda+\mu}{\mu}\frac{\lambda}{\mu} - p\frac{\lambda}{\mu}\right)\pi_0 = \left(q+\frac{\lambda}{\mu}\right)\frac{\lambda}{\mu}\pi_0 \quad \text{et} \quad \pi_3 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2\left(p\left(q+\frac{\lambda}{\mu}\right)+q\right)\pi_0}$$

On utilise la condition de normalisation :

$$\pi_0\left(1+\frac{\lambda}{\mu}+\left(q+\frac{\lambda}{\mu}\right)\frac{\lambda}{\mu}+\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2\left(p\left(q+\frac{\lambda}{\mu}\right)+q\right)\right)=1$$

ce qui démontre l'unicité de la distribution stationnaire.

Synthèse. Le vecteur π précédemment construit est une distribution de probabilité vérifiant par construction les équations de balance. On a ainsi existence et unicité d'une distribution stationnaire.

3. Un groupe qui arrive à un instant quelconque du régime stationnaire doit repartir s'il y a 2 patients en salle d'attente (et 1 avec le médecin), ou si c'est un couple et qu'il y a 1 personne en salle d'attente (et 1 avec le médecin). Plaçons-nous en régime stationnaire, notons G_1 et G_2 respectivement les évènements « le groupe qui arrive est constitué d'un seul patient » et « le groupe qui arrive est constitué de deux patients ». Appelons R (comme « Rejet ») l'évènement « le groupe qui arrive doit repartir ». En conditionnant par le système complet d'évènements (formule des probabilités totales) $\{G_1, G_2\}$, on a :

$$\mathbb{P}(R)=\mathbb{P}(R|G_1)\mathbb{P}(G_1)+\mathbb{P}(R|G_2)\mathbb{P}(G_2)=\pi_3 p+(\pi_2+\pi_3)q=\pi_3+q\pi_2$$

4. On calcule l'espérance, en se souvenant que N_∞ a pour loi π, calculée précédemment :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(N_\infty) &= \sum_{k=0}^{3} k\pi_k = \pi_1+2\pi_2+3\pi_3\\ &= \pi_0\left(\frac{\lambda}{\mu}+2\left(q+\frac{\lambda}{\mu}\right)\frac{\lambda}{\mu}+3\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2\left(p\left(q+\frac{\lambda}{\mu}\right)+q\right)\right)\end{aligned}$$

En appliquant la formule de Little à ce système ergodique, on en déduit le temps moyen dans le système :

$$\overline{R}=\frac{\mathbb{E}(N_\infty)}{\overline{\lambda}}$$

Calculons $\overline{\lambda}$. C'est le taux moyen des arrivées de **patients**, car ici $N(t)$ est le nombre de patients à l'instant t. Or, λ est le nombre moyen d'arrivées de **groupes** de (1 ou 2) patients. De plus, il faut seulement tenir compte des arrivées **effectives** (on ne doit pas compter les arrivées rejetées, car pour celles-ci tout se passe comme si elles n'avaient pas eu lieu). On a donc :

$$\overline{\lambda}=\pi_0(p\lambda+2q\lambda)+\pi_1(p\lambda+2q\lambda)+\pi_2 p\lambda$$

Le temps moyen d'attente est d'un patient est alors :

$$\overline{R_q}=\overline{R}-\frac{1}{\mu}=\frac{\mathbb{E}(N_\infty)}{\overline{\lambda}}-\frac{1}{\mu}$$

Exercice 5 - Dimensionnement d'un commutateur ATM

On modélise un commutateur ATM par une file M/M/1/K, dans laquelle les clients sont des cellules de 53 octets. On suppose que le taux d'activité du serveur est 0.8. Comment choisir la taille de la file pour que la probabilité de perte d'une cellule soit plus petite que 10^{-10} ?
On se placera en régime stationnaire. Pour l'application numérique, on pourra utiliser une approximation (que l'on justifiera) permettant de dimensionner la file rapidement.

Corrigé

La capacité de la file étant K, la probabilité de perdre une cellule est la probabilité de trouver le système dans l'état K. Comme on se place en régime stationnaire, c'est π_K. On peut le calculer de façon exacte grâce au cours : formule (2.60). Comme ici on a $n = 1$ serveur, $\dfrac{1}{n!n^{j-n}} = 1$ pour tout j entre 2 et K, d'où :

$$\pi_K = \pi_0 \rho^K \quad \text{où} \quad \rho = \lambda/\mu = 0,8$$

Pour calculer π_0, on utilise $\sum_{j=0}^{K} \pi_j = 1$, qui donne avec (2.60) :

$$\pi_0 \left(1 + \rho + \sum_{j=2}^{K} \rho^j\right) = 1 \qquad \textit{i.e.} \qquad \pi_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}$$

On a donc :

$$\pi_K = \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}} \rho^K$$

Dimensionner la file de manière à ce que la probabilité de perte d'une cellule soit $< 10^{-10}$, c'est trouver K tel que $\frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}} \rho^K < 10^{-10}$. Si on le souhaite vraiment, cette inéquation se résout de façon exacte car elle s'écrit $1-\rho < 10^{-10}(\rho^{-K} - \rho)$:

$$\rho^{-K} = e^{-K \ln \rho} > (1-\rho)10^{10} + \rho \Longleftrightarrow -K \ln \rho > \ln\left((1-\rho)10^{10} + \rho\right) \Longleftrightarrow K > \frac{\ln\left((1-\rho)10^{10} + \rho\right)}{-\ln \rho}$$

car $0 < \rho < 1$ donc $-\ln \rho > 0$. AN avec $\rho = 0,8$:

$$K > \frac{\ln(0,2 \cdot 10^{10} + 0,8)}{-\ln 0,8} \approx 95,98$$

Il faut donc choisir K au moins égal à 96.

En pratique, l'ingénieur confronté à ce calcul utilise $1 - \rho^{K+1} \approx 1$, vu l'ordre de grandeur prévisible de K (car $0 < \rho < 1$, donc la suite géométrique de raison ρ converge rapidement vers 0), ce qui revient à écrire $\pi_K \approx (1-\rho)\rho^K$. On note que cette valeur de π_K est celle d'une file M/M/1, donc cette approximation revient à considérer que la capacité de la file est infinie, alors qu'on veut justement calculer sa taille ! C'est donc assez « tordu » conceptuellement mais ça donne de très bons résultats numériques ! Il reste à résoudre l'inéquation :

$$(1-\rho)\rho^K < 10^{-10} \Longleftrightarrow K > \frac{-10\ln(10) - \ln(1-\rho)}{\ln(\rho)} \approx 95,98 \quad \text{pour } \rho = 0,8$$

Ainsi, l'approximation fonctionne vraiment très bien (pas étonnant).