TD Chaînes de Markov à temps discret

ENSSAT

16/12/2020

Exercice 7 - la ruine du joueur (DS 2004-2005 Info 2)

On considère un jeu comportant une suite d'étapes indépendantes de type Bernoulli : à chaque étape on peut miser 1 euro ; on a alors une probabilité $p \in]0,1[$ de gagner 1 euro et une probabilité $q = 1-p$ de perdre sa mise.

Un joueur possède une fortune initiale de i euros. Il adopte la stratégie suivante : il décide de s'arrêter de jouer lorsqu'il aura atteint une fortune de N euros (on suppose bien sûr $N > i > 1$) à moins qu'il ne soit ruiné avant, auquel cas il s'arrête aussi de jouer par la force des choses !

1. Soit X_n la fortune du joueur juste après la n-ième étape ($X_0 = i$, $X_1 = i+1$ ou $X_1 = i-1$,etc). Justifier en une phrase que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une CMTDH, et donner le graphe des transitions de cette chaîne.
2. Donner les propriétés (récurrents ? transitoires ? absorbants ?) des états.
3. **Cours**. Retrouver la relation reliant les différentes probabilités d'atteinte f_{ij} grâce à un raisonnement empirique. En déduire la relation reliant les probabilités d'absorption.
4. On note ici r_i la probabilité $f_{i,0}$. Que représente r_i dans ce contexte ?
5. Que valent r_0 et r_N ?
6. Déduire de ce qui précède que la suite $(r_i)_{i\in[\![0,N]\!]}$ est solution de l'équation récurrente suivante :

$$\forall i \in [\![1, N-1]\!] \qquad r_i = q\, r_{i-1} + p\, r_{i+1} \tag{1}$$

7. Démontrer que la solution générale de cette équation récurrente est :

$$r_i = \begin{cases} \alpha + \beta \left(\dfrac{q}{p}\right)^i & \text{si } p \neq \frac{1}{2} \\ \alpha + \beta\, i & \text{si } p = \frac{1}{2} \end{cases}$$

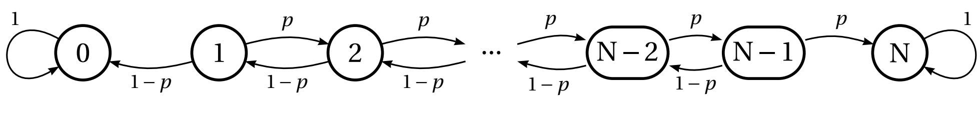
   où α et β sont deux constantes arbitraires.

   Indication. Utiliser la méthode classique de résolution des équations récurrentes linéaires à coefficients constants vue en première année (équation caractéristique, etc).

8. En déduire r_i pour tout $i \in [\![0, N]\!]$.

Corrigé

1. Le choix à l'instant n ne dépend que de la somme dont il dispose à l'instant $n-1$: 0, il arrête, N il arrête et sinon il rejoue. Elle est homogène puisque ses conditions ne dépendent que de 0 et N. Son graphe de transition :



2. 0 et N sont absorbants : dès qu'on y arrive, le joueur s'arrête de jouer. Ils sont donc récurrents. Toujours les autres états sont de fait transitoire par construction.

3. Rappelons les équations des probabilités atteinte :

$$\forall\ i,j,\quad f_{ij} = p_{ij} + \sum_{k\neq j} p_{ik} f_{kj}$$

et des probabilités d'absorption :

$$\forall\ i \notin \{0,\mathrm{N}\}, \forall\ j \in \{0,\mathrm{N}\},\quad f_{i,j} = p_{i,j} + \sum_{k\notin\{0,\mathrm{N}\}, k\neq j} p_{i,k} f_{kj}$$

4. Ici, r_i représente la probabilité, partant avec une mise i, de se retrouver ruiner : c'est la probabilité de ruine du joueur.
5. Rapidement $r_0 = 1$ (si on est ruiné, on est sûr de le rester) et $r_\mathrm{N} = 0$ (car le joueur s'arrête avec sa somme N).
6. On utilise les équations vues précédemment :

$$\forall\ i \in [\![1;\mathrm{N}-1]\!],\quad f_{i0} = p_{i0} + \sum_{k\in[\![1;\mathrm{N}-1]\!], k\neq i} p_{ik} f_{k0}$$

Or, par construction, $p_{ik} = q$ si $k = i+1$, $1-p$ si $k = i-1$ et 0 sinon. Donc

$$\forall\ i \in [\![1;\mathrm{N}-1]\!],\quad f_{i0} = p_{i0} + p f_{(i+1)0} + (1-p) f_{(i-1)0}$$

Si $i > 1$, on a $p_{i0} = 0$ et on obtient le résultat attendu. Si $i = 1$, on a alors $f_{i0} = p_{i0} + pr_{i+1} = q + pr_{i+1} = qr_0 + pr_{i+1}$.
7. La suite est récurrente linéaire d'ordre 2. L'équation caractéristique est $\mathrm{X} = q + p\mathrm{X}^2$ soit $p\mathrm{X}^2 - \mathrm{X} + q$, de discriminant $\Delta = 1 - 4pq = (2p-1)^2$. Si $p \neq \frac{1}{2}$, les racines sont donc

$$x_1 = \frac{1-(2p-1)}{2p} = \frac{2(1-p)}{2p} = \frac{q}{p} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1+(2p-1)}{2p} = 1$$

et la suite (r_i) s'écrit alors

$$r_i = \alpha 1^i + \beta \left(\frac{q}{p}\right)^i$$

Si $p = \frac{1}{2}$, il y a une racine double qui est 1 et alors (r_i) s'écrit

$$r_i = \alpha + \beta i$$

8. On utilise $r_0 = 1$ et $r_\mathrm{N} = 0$. Dans le cas $p \neq \frac{1}{2}$, on obtient après calcul :

$$\forall\ i \in [\![0;\mathrm{N}]\!],\quad r_i = -\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^\mathrm{N}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^\mathrm{N}} + \frac{1}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^\mathrm{N}}\left(\frac{q}{p}\right)^i = \frac{-\left(\frac{q}{p}\right)^\mathrm{N} + \left(\frac{q}{p}\right)^i}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^\mathrm{N}}$$

Si $p = \frac{1}{2}$, on a alors

$$\forall\ i \in [\![0;\mathrm{N}]\!],\quad r_i = 1 - \frac{i}{\mathrm{N}}$$

Exercice 8 - *PageRank* d'une page web

Le fonctionnement du moteur de recherche *Google* nécessite la connaissance, pour chaque page web, des probabilités de transition vers les autres pages. Pour simplifier, considérons un modèle à temps discret, l'unité de temps étant la visite d'une page [1]. Appelons « surf » une suite de visites de pages reliées entre elles par des liens « hypertexte » et considérons un « surfeur » quelconque. On numérote chaque page du web et on note X_n la v.a. qui prend la valeur i lorsque le surfeur est à l'instant $n \in \mathbb{N}^*$ (*i.e.* lors de la n-ième page visitée) sur la page numéro i. Les concepteurs de *Google* [2] ont fait l'hypothèse (discutable mais onnant de bons résultats en pratique) de l'absence de mémoire des surfeurs du net, à savoir que la probabilité qu'un surfeur présent sur une page i à l'instant n transite vers une page j à l'instant $n+1$ ne dépend pas des pages visitées avant l'instant n mais seulement des liens disponibles sur la page i. On peut de plus supposer que les probabilités de transition n'évoluent pas sur un temps d'observation suffisamment court (de l'ordre de la journée). Toutes ces hypothèses reviennent à supposer que la suite de v.a. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une chaîne de Markov à temps discret homogène d'espace des états E égal à l'ensemble des numéros des pages disponibles. D'après la définition d'un surf, s'il n'existe pas de lien de la page i vers la page j, on a $p_{i,j} = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \,|\, X_n = i) = 0$.
Un travail préliminaire, en adaptation constante dans la pratique, est l'estimation des probabilités de transition non nulles. Nous supposons ici ce travail réalisé [3].

1. On note P la matrice des probabilités de transition et $p(n)$ le vecteur ligne :

$$p(n) = \big(p_j(n)\big)_{j\in E} = \big(\mathbb{P}(X_n = j)\big)_{j\in E}$$

   Démontrer que $p(n) = p(1)P^{n-1}$.

   On va dans la suite donner une idée des résultats que permettent d'obtenir le modèle de Markov choisi en supposant que le web comporte k pages, *i.e.* $E = \{1, 2, \dots, k\}$.

2. On suppose que la première page visitée est la numéro 2 et qu'à partir d'une page quelconque, on continue à surfer en choisissant de façon équiprobable une des $k-1$ autres pages.
   (a) Écrire P pour $k \geqslant 2$ et dessiner le graphe des transitions pour $k = 3$.
   (b) Pour cette question seulement, on suppose $k = 4$. Calculer la probabilité qu'à la troisième visite le surfeur soit revenu sur la page 2.
   (c) Étudier les propriétés des états et démontrer que $p(n)$ converge quand n tend vers l'infini vers une limite $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \dots, \pi_k)$ indépendante de $p(1)$. Que représente π dans ce contexte ? Que vaut $\boldsymbol{\pi}$ (pas de calcul, juste du bon sens) ?
   (d) En réalité, les $p_{i,j}$ pour $j \neq i$ ne sont évidemment pas tous égaux. Expliquer comment *Google* peut calculer $\boldsymbol{\pi}$.

3. Dans la réalité, il existe des pages qui n'ont aucun lien vers d'autres pages.
   (a) Que dire du numéro d'une telle page ?
   (b) On suppose que $k = 4$, que $p_{1,2} = 1/3$, $p_{1,3} = 2/3$, $p_{3,1} = 1/3$, $p_{3,4} = 2/3$ et que les pages 2 et 4 n'ont aucun lien vers d'autres pages. Écrire P et le graphe des transitions. On suppose que le surfeur commence par la page 1. Calculer la probabilité $f_{1,2}$ (respectivement $f_{1,4}$) qu'il termine son surf sur la page 2 (respectivement sur la page 4).

---

1. L'unité de temps considérée étant la durée de visite d'une page, elle n'est pas constante, mais ce n'est pas gênant : les transitions ont tout simplement lieu à la fin de la visite d'une page. Si on s'intéressait de plus au temps passé sur chaque page, il conviendrait d'adopter un modèle à temps continu.
2. Larry Page et Sergey Brin, premier brevet déposé en 1997
3. Pour chaque page j reliée à i par un lien, il s'agit d'estimer statistiquement la proportion de clients transitant de la page i à la page j. Cette proportion est fonction de la fréquentation de la page j, donc de la « popularité » du site j.

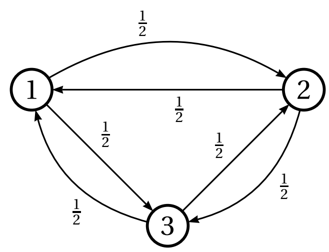
Corrigé

1. Cours : on démontre d'abord que $p(n+1) = p(n)\mathrm{P}$ (pour $n \geqslant 1$) par conditionnement par rapport à $([\mathrm{X}_n = k])_{k\in\mathrm{E}}$, puis on conclut par une récurrence rapide que $p(n) = p(1)\mathrm{P}^{n-1}$.

2. (a) Par construction, $p_{ii} = 0$ et pour $j \neq i$, $p_{ij} = \frac{1}{k-1}$. La matrice s'écrit donc

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{k-1} & \cdots & \frac{1}{k-1} \\ \frac{1}{k-1} & 0 & \cdots & \frac{1}{k-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{k-1} & \frac{1}{k-1} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Pour $k = 3$, cela donne le graphe :



(b) On prend $k = 4$ et on souhaite calculer $\mathbb{P}(\mathrm{X}_3 = 2|\mathrm{X}_1 = 2)$. On utilise les propriétés des chaînes de Markov :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathrm{X}_3 = 2|\mathrm{X}_1 = 2) &= \mathbb{P}(\mathrm{X}_3 = 2|\mathrm{X}_2 = 1, \mathrm{X}_1 = 2) + \mathbb{P}(\mathrm{X}_3 = 2|\mathrm{X}_2 = 2, \mathrm{X}_1 = 2) + \mathbb{P}(\mathrm{X}_3 = 2|\mathrm{X}_2 = 3, \mathrm{X}_1 = 2) \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

On peut aussi calculer $p(3) = p(1)\mathrm{P}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^2$. Après calcul, $p(3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ et on obtient le même résultat.

(c) Dans le cas général, tout état est récurrent : la chaîne est irréductible. De plus, tout état est apériodique (en effet, par exemple, on peut revenir en 2 en 2 et 3 étapes. Le PGCD sera alors 1). La chaîne est donc irréductible, finie et apériodique : d'après le théorème ergodique principal, la chaîne admet une distribution limite ne dépendant pas de l'état initial, et $(p(n))$ converge donc vers π, indépendante de $p(1)$.
Dans le contexte de l'exercice, π représente la distribution "moyenne" des pages : plus π_i est grand, plus la page a des chances d'être consultée. Ici, puisqu'il y a équiprobabilité d'aller d'une page à une autre, on peut supposer que $\pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{k} & \cdots & \frac{1}{k} \end{pmatrix}$. En calculant $\pi\mathrm{P}$, on obtient bien π.

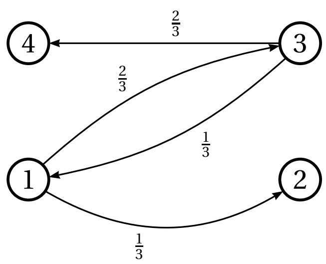
(d) Une des possibilités : calculer $p(n)$ pour de grandes valeurs de n (informatiquement) pour obtenir une valeur approchée assez bonne de la distribution limite.

3. (a) Le numéro d'une telle page représente un état absorbant : arrivé à cette page, on ne peut plus en sortir.

(b) On utilisant l'énoncé :

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et le graphe :



Par définition

$$\begin{aligned}
f_{1,2} &= \mathbb{P}(\exists\, n \in \mathbb{N}^*, X_n = 2 | X_1 = 1) \\
&= \sum_{n \geqslant 1} \mathbb{P}(X_n = 2 | X_1 = 1) \\
&= \sum_{n \geqslant 0} \mathbb{P}_1(X_2 = 3, X_3 = 1, \cdots, X_{2n-1} = 1, X_{2n} = 2) \\
&= \sum_{n \geqslant 0} \left(\frac{2}{3}\frac{1}{3}\right)^n \frac{1}{3} \text{ par propriété des chaînes de Markov} \\
&= \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{2}{9}} = \frac{3}{7}
\end{aligned}$$

Par le même raisonnement,

$$f_{1,4} = \sum_{n \geqslant 0} \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\frac{2}{3}\right)^n \frac{2}{3} = \frac{4}{7}$$

Exercice 9 - Chaîne à nombre fini d'états irréductible non apériodique

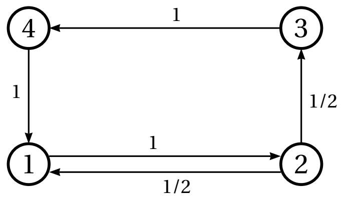
On considère une chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'espace des états $E = \{1, 2, 3, 4\}$, de distribution initiale $p(0)$ et de matrice de transition :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Dessiner le graphe des transitions. Quelles sont les propriétés des états ?
2. Déterminer les valeurs propres de P. *Pour la suite de l'exercice, on doit trouver* 1, -1, $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $-\frac{1}{\sqrt{2}}$.
3. Démontrer que les suites $\big(p(2n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big(p(2n+1)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.
4. On rappelle qu'on appelle ***distribution stationnaire*** d'une matrice stochastique Q tout vecteur de probabilité $\boldsymbol{\pi}$ vérifiant $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}Q$. On vérifierait facilement que P^2 possède une infinité de distributions stationnaires et que $\mathbf{u} = (0, 2/3, 0, 1/3)$ est l'une d'entre elles.
   Quelle sont les limites des suites $\big(p(2n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big(p(2n+1)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $p(0) = \mathbf{u}$?
   La suite $\big(p(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle lorsque $p(0) = \mathbf{u}$?
5. Déterminer les distributions stationnaires de P.
6. Par rapport aux hypothèses du théorème ergodique principal, que montre la question 4 ? la question 5 ?
7. **Compléments non demandé en DS.** Soient $\mathbf{q}$ une distribution de probabilité quelconque sur E et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la CMTDH de matrice de transition P^2 et de distribution initiale $\mathbf{q}$.
   On note $q(n) = \mathbb{P}(Y_n = j)_{j\in E}$ (pour ne pas le confondre avec $p(n) = \mathbb{P}(X_n = j)_{j\in E}$).
   (a) Démontrer que la suite $\big(q(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Quelles sont les possibilités pour sa limite ?
   (b) Déterminer les propriétés des états de $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Commenter.
   (c) Comment peut-on déterminer les distributions initiales pour lesquelles la suite $\big(p(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ? Préciser la limite.

Corrigé

1. On obtient rapidement le graphe suivant :



   La chaîne est irréductible et tous les états sont périodiques de période 2.

2. On détermine le polynôme caractéristique.

$$\begin{aligned}
\chi_P(X) &= \begin{vmatrix} X & -1 & 0 & 0 \\ -1/2 & X & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & X & -1 \\ -1 & 0 & 0 & X \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} X-1 & -1 & 0 & 0 \\ X-1 & X & -1/2 & 0 \\ X-1 & 0 & X & -1 \\ X-1 & 0 & 0 & X \end{vmatrix} \quad C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 + C_4 \\
&= (X-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & X & -1/2 & 0 \\ 1 & 0 & X & -1 \\ 1 & 0 & 0 & X \end{vmatrix} \\
&= (X-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & X+1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & X & -1 \\ 0 & 1 & 0 & X \end{vmatrix} \\
&= (X-1)\begin{vmatrix} X+1 & -1/2 & 0 \\ 1 & X & -1 \\ 1 & 0 & X \end{vmatrix} \\
&= (X-1)\big((X+1)(X^2) - (-1/2)(X+1)\big) \\
&= (X-1)(X+2)(X^2 + \frac{1}{2})
\end{aligned}$$

   Les valeurs propres sont donc 1, -1, $\frac{i}{\sqrt{2}}$ et $-\frac{i}{\sqrt{2}}$.

3. P est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ (4 valeurs propres simples) et s'écrit donc $P = QDQ^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

   D'après la formule de Chapman-Kolmogorov, on en déduit que $p(2n) = p(0)P^{2n}$ et $p(2n+1) = p(0)P^{2n+1}$.
   Or

$$P^{2n} = QD^{2n}Q^{-1} = Q\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{2n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^{2n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^{2n} \end{pmatrix}Q^{-1} \longrightarrow Q\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}Q^{-1}$$

Il en est de même pour P^{2n+1} qui converge vers $Q\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}Q^{-1}$. Ainsi, $(p(2n))$ et $(p(2n+1))$ convergent.

4. $\mathbf{u}$ étant une distributions stationnaires de P^2, on a rapidement :

$$p(2n) = \mathbf{u}P^{2n} = \mathbf{u} \quad \text{et} \quad p(2n+1) = \mathbf{u}P^{2n+1} = \mathbf{u}P = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{v}$$

donc $(p(2n))$ converge vers $\mathbf{u}$ et $(p(2n+1))$ converge vers $\mathbf{v} \neq \mathbf{u}$. Puisque $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$, la suite $p(n)$ ne converge pas.

5. On résout $\begin{pmatrix} a & b & c & d \end{pmatrix}P = \begin{pmatrix} a & b & c & d \end{pmatrix}$ avec $a+b+c+d=1$. On obtient l'ensemble :

$$\left\{\begin{pmatrix} 2d, 2d, d, d \end{pmatrix}, \quad d \in \mathbb{R}\right\}$$

et avec l'hypothèse, $2d+2d+d+d=1$ soit $d=\frac{1}{6}$. L'unique distribution stationnaire est donc $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$, qui ne dépend pas de l'état initial.

6. La question 4 montre qu'il existe au moins une distribution initiale $p(0) = \mathbf{u}$ pour laquelle $p(n)$ n'a pas de limite. Par conséquent, **on ne peut pas faire l'économie de l'hypothèse « apériodique »** dans le théorème ergodique principal (les deux autres hypothèses - chaîne irréductible et à nombre fini d'états - sont vérifiées).

   La question 5 montre que, pourtant, la matrice P possède une distribution stationnaire $\mathbf{v}$. Si $p(0) = \mathbf{v}$, on a donc $p(n) = \mathbf{v}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; en particulier dans ce cas, la suite $\big(p(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (c'est une suite constante). Il est donc possible qu'une CMTDH irréductible à nombre fini d'états converge pour certaines distributions initiales et pas pour d'autres.

   On retient qu'**une distribution stationnaire $\boldsymbol{\pi}$ est une distribution limite**, au moins pour $p(0) = \pi$, mais qu'une CMTDH irréductible à nombre fini d'états peut posséder une distribution stationnaire sans être ergodique. Il faut donc prendre garde au vocabulaire : l'existence et l'unicité d'une ***distribution*** stationnaire ne signifie pas qu'il y a un ***régime*** stationnaire, **même pour une chaîne irréductible à nombre fini d'états**!
   On voit que, dans le cas où l'un des théorèmes ergodiques s'applique, démontrer qu'il y a ergodicité **avant** de résoudre le système d'équations $\pi = \pi P$ et $\sum_{j\in E} \pi_j = 1$ n'est pas une précaution inutile!

7. (a) D'après la question 3, on constate que pour tout n, $q(n) = p(2n)$. Puisque $(p(2n))$ converge, on en déduit que $(q(n))$ converge également.
   Pour déterminer les limites possibles (i.e. les distributions stationnaires possibles), on applique la même méthode que la question 5, en resolvant $\boldsymbol{\pi}P^2 = \boldsymbol{\pi}$, avec

$$P^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   On obtient :

$$\left\{\begin{pmatrix} 2/3-2d & 2d & 1/3-d & d \end{pmatrix}, \quad d \in \left[0, \frac{1}{3}\right]\right\}$$

   (b) On obtient le graphe suivant :

On constate rapidement que la chaîne est apériodique mais n'est pas irréductible (les états 1/3 ne sont pas communicants avec les états 2/4). On ne peut pas appliquer le théorème ergodique, mais c'est cohérent : il n'y a pas une seule distribution stationnaire, mais une infinité.

(c) La suite $\left(p(n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge que pour les distributions initiales $p(0)$ pour lesquelles les suites des termes d'indice pair et impair convergent vers la même limite. Pour les trouver, il conviendrait de calculer Q et Q^{-1}, ce qui permettrait de constater (calculs des vecteurs propres et de Q^{-1} faits avec SAGE) que l'on a :

$$\lim_{n\to+\infty} P^{2n} = Q\ \mathrm{diag}(1,1,0,0)\ Q^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$\lim_{n\to+\infty} P^{2n+1} = Q\ \mathrm{diag}(1,-1,0,0)\ Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

Il reste alors à chercher les distributions (a,b,c,d) pour laquelle on a égalité des deux limites :

$$(a,b,c,d)\begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} = (a,b,c,d)\begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

Ce système se réduit immédiatement à une seule équation $a+c=b+d$, à laquelle il faut bien sûr ajouter $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0, d \geq 0$ et $a+b+c+d=1$. L'unique distribution stationnaire $\mathbf{v} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$ de P est bien sûr l'une des solutions, mais ce n'est pas la seule. Pour toute distribution de probabilité vérifiant $a+c=b+d$, la suite $\left(p(n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, nécessairement vers $\mathbf{v}$ puisqu'une distribution limite est stationnaire.