TD Chaînes de Markov à temps discret

ENSSAT

09/12/2020

Exercice 1 - chaîne à temps discret absorbante (DS 2001-2002 Info 2)

On considère une CMTDH $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à trois états notés 1, 2, et 3, dont la matrice de transition est :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Dessiner le graphe des transitions. Quelles sont les propriétés des états de cette chaîne ?
2. (a) Soit N la variable aléatoire égale au nombre de transitions jusqu'à l'absorption dans l'état 3. Déterminer la loi de probabilité de N sachant que $X_0 = 1$.
   (b) En déduire que, partant de l'état 1, on atteint forcément l'état 3 après un nombre fini de transitions (le résultat est intuitivement vrai mais on vous demande ici une démonstration rigoureuse).
   (c) Toujours sous l'hypothèse que la chaîne est à l'instant 0 dans l'état 1, calculer le nombre moyen de transitions à effectuer pour être absorbé dans l'état 3.
3. On ne suppose maintenant rien sur l'état initial, *i.e.*

$$p(0) = \big(\mathbb{P}(X_0 = 1), \mathbb{P}(X_0 = 2), \mathbb{P}(X_0 = 3)\big) = (a, b, c)$$

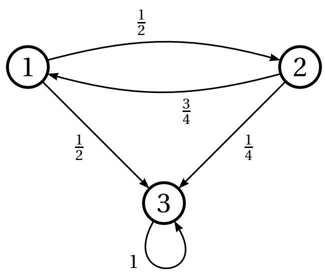
   est une distribution de probabilité quelconque.
   (a) Démontrer qu'il existe une matrice diagonale D (que l'on calculera) et une matrice inversible Q (que l'on ne calculera pas) telles que $P = Q\,D\,Q^{-1}$.
   (b) Justifier que le vecteur de probabilité transitoire :

$$p(n) = \big(\mathbb{P}(X_n = j)\big)_{j\in\{1,2,3\}}$$

   possède une limite $\boldsymbol{\pi}$ quand $n \to +\infty$.
   (c) Que conjecturer pour la valeur de $\boldsymbol{\pi}$? Démontrer cette conjecture. Y a-t-il ergodicité ?

Corrigé

1. En utilisant la matrice de transition :



   On constate alors que l'état 3 est absorbant, les états 1 et 2 sont communiquants.

2.

(a) Tout d'abord $\mathbb{P}(N=0)=0$ puisqu'à l'état 0, $X_0=1$. Ensuite, on constate par propriété du graphe de transition que, pour tout $k \geqslant 0$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N=2k+1|X_0=1) &= \mathbb{P}_1(N=2k+1)\\
&= \mathbb{P}(X_1=2, X_2=1, \ldots, X_{2k-1}=2, X_{2k}=1, X_{2k+1}=3|X_0=1)\\
&= \frac{\mathbb{P}(X_0=1, X_1=2, X_2=1, \ldots, X_{2k-1}=2, X_{2k}=1, X_{2k+1}=3)}{\mathbb{P}(X_0=1)}\\
&= \frac{p_1(0)p_{1,2}p_{2,1}\ldots p_{1,2}p_{2,1}p_{1,3}}{p_1(0)} \text{ par propriété des chaînes de Markov}\\
&= \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)^k \frac{1}{2}\\
&= \left(\frac{3}{8}\right)^k \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Ainsi, et par le même raisonnement :

$$\boxed{\mathbb{P}_1(N=2k+1) = \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)^k \frac{1}{2} = \left(\frac{3}{8}\right)^k \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_1(N=2k+2) = \left(\frac{3}{8}\right)^k \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \left(\frac{3}{8}\right)^k \frac{1}{8}}$$

(b) Pour démontrer rigoureusement le résultat, calculons $\mathbb{P}(N<\infty)$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_1(N<\infty) &= \mathbb{P}_1(N\in\mathbb{N})\\
&= \mathbb{P}_1\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} N=k\right)\\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}_1(N=k)\\
&= 0 + \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{3}{8}\right)^k\frac{1}{4} + \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{3}{8}\right)^k\frac{1}{8}\\
&= \frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{3}{8}} + \frac{1}{8}\frac{1}{1-\frac{3}{8}} = 1
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathbb{P}(N=\infty)=0$: presque sûrement, on atteint forcément l'état 3.

(c) Pour déterminer le nombre moyen de transition avant d'atteindre l'état 3, on va calculer l'espérance de N, en rappelant le résultat

$$\sum_{k=0}^{\infty} kp^k = \frac{p}{(1-p)^2}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[\mathrm{N}] &= \sum_{k=0}^{\infty} k\mathbb{P}_1(\mathrm{N}=k)\\
&= 0 + \sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)\mathbb{P}_1(\mathrm{N}=2k+1) + \sum_{k=0}^{\infty}(2k+2)\mathbb{P}_1(\mathrm{N}=2k+2)\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)\left(\frac{3}{8}\right)^k\frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty}(2k+2)\left(\frac{3}{8}\right)^k\frac{1}{8}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty} k\left(\frac{3}{8}\right)^k + \left(\frac{3}{8}\right)^k\frac{1}{2} + k\left(\frac{3}{8}\right)^k\frac{1}{4} + \left(\frac{3}{8}\right)^k\frac{1}{4}\\
&= \frac{5}{4}\sum_{k=0}^{\infty} k\left(\frac{3}{8}\right)^k + \frac{3}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{3}{8}\right)^k\\
&= \frac{5}{4}\frac{\frac{3}{8}}{\left(1-\frac{3}{8}\right)^2} + \frac{3}{4}\frac{1}{1-\frac{3}{8}}\\
&= \frac{12}{5}
\end{aligned}
$$

En moyenne, il faudra donc $\frac{12}{5} = 2,4$ étapes avant d'atteindre l'état absorbant.

3. (a) On souhaite diagonaliser P. On cherche donc les valeurs propres de P. Notons χ_{P} le polynôme caractéristique de P. Alors :

$$
\begin{aligned}
\chi_{\mathrm{P}}(\mathrm{X}) &= \begin{vmatrix} \mathrm{X} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} & \mathrm{X} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \mathrm{X}-1 \end{vmatrix}\\
&= (\mathrm{X}-1)\left(\mathrm{X}^2 - \frac{3}{8}\right)
\end{aligned}
$$

P a donc 3 valeurs propres simples (polynôme scindé à racines simples) : 1 (ce qui était sûr, puisque P est une matrice stochastique), $\sqrt{\frac{3}{8}}$ et $-\sqrt{\frac{3}{8}}$. Ainsi, P est diagonalisable. Il existe donc une matrice inversible $\mathrm{Q} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que

$$
\mathrm{P} = \mathrm{Q}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{8}} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{\frac{3}{8}} \end{pmatrix}\mathrm{Q}^{-1}
$$

(b) Remarquons que $-1 < \sqrt{\frac{3}{8}} < 1$ et $-1 < -\sqrt{\frac{3}{8}} < 1$. Ainsi, D^n converge vers une matrice limite qui est $\mathrm{D}_\infty = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Par produit, P^n converge vers la matrice $\mathrm{QD}_\infty\mathrm{Q}^{-1}$. Or, puisque

$$
p(n) = p(0)\mathrm{P}^n
$$

on en déduit que $(p(n))$ converge quand $n \to +\infty$ vers

$$
\pi = p(0)\mathrm{QD}_\infty\mathrm{Q}^{-1}.
$$

(c) Intuitivement, l'état 3 étant absorbant et, d'après la question 2, on y arrive en temps fini presque sûrement, le vecteur stationnaire devrait être $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (stabilité dans l'état 3).

Pour déterminer π, on utilise la propriété $\pi\mathrm{P} = \pi$ en sachant que π est un vecteur de probabilité. Ainsi, en notant $\pi = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$ alors on a

$$
\pi\mathrm{P} = \pi \quad \text{et} \quad \alpha + \beta + \gamma = 1
$$

or

$$\pi P = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}\beta & \frac{1}{2}\alpha & \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{4}\beta + \gamma \end{pmatrix}$$

Ainsi, on obtient le système suivant :

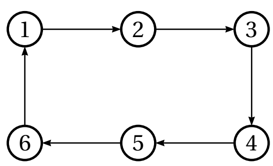
$$\begin{cases} \frac{3}{4}\beta = \alpha \\ \frac{1}{2}\alpha = \beta \\ \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{4}\beta + \gamma = \gamma \end{cases} \sim \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 1 \end{cases}$$

Ainsi, le vecteur stationnaire est, comme attendu, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et cela ne dépend pas de l'état initial : il y a **ergodicité**.

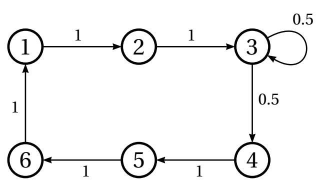
Exercice 3 : propriétés des CMTD

Quelles sont les propriétés des CMTDH associées aux graphes suivants : états accessibles, communiquant entre eux, récurrents, transitoires, absorbants, périodiques, apériodiques ? Chaîne irréductible, apériodique ?

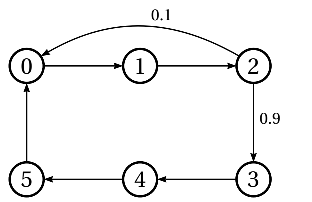
a.



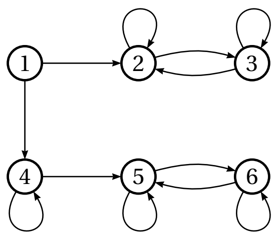
b.



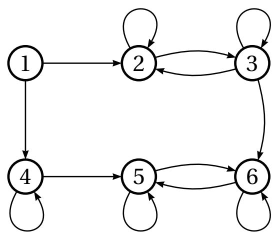
c.



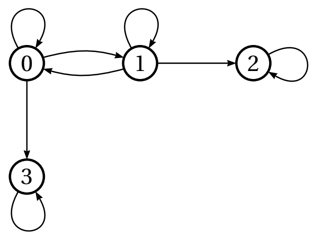
d.



e.



f.



Corrigé

a. Tous les états communiquent : la chaîne est **irréductible**. Puisqu'il y a un nombre fini d'état, tous les états sont donc **récurrents**.
Aucun état n'est absorbant.
Enfin, chaque état est **périodique de périodicité** 6 par construction de la chaîne.

b. Tous les états communiquent : la chaîne est **irréductible** finie, donc tous les états sont **récurrents**.
Aucun état n'est absorbant.
Puisque 3 est **apériodique** (car $p_{33} = \frac{1}{2} > 0$), et que la chaîne est irréductible, on en déduit que la chaîne est donc elle-même **apériodique**.

c. Tous les états communiquent, donc la chaîne est **irréductible**, et étant finie, tous les états sont récurrents.
Aucun état n'est absorbant.
Enfin, l'état 2 est de périodicité 3 et puisque la chaîne est irréductible, tous les états sont **de périodicité** 3.

d. La chaîne n'est pas irréductible : en effet les états 1 et 2 ne communiquent pas. En revanche :
   - Les états 2 et 3 communiquent ; les états sont récurrents car une fois dans la chaîne $2-3$, on y reste ;
   - Les états 5 et 6 communiquent ; les états sont récurrents car une fois dans la chaîne $5-6$, on y reste ;
   - 1 est **transitoire** puisque $f_{11} = 0$. Sa **périodicité** est infinie.
   - 4 est **transitoire** car dès qu'on quitte 5, on n'y revient jamais.

   Il n'y a pas d'état absorbant.
   $2, 3, 4, 5, 6$ sont apériodiques, car $p_{2,2} > 0$, $p_{3,3} > 0$, $p_{4,4} > 0$ $p_{5,5} > 0$ et $p_{6,6} > 0$.

e. De même la chaîne n'est pas irréductible. 2 et 4 sont accessibles à partir de 1 mais 1 n'est pas accessible. 2 et 3 communiquent, 5 et 6 également.
   - L'état 1 est **transitoire**, car $f_{1,1} = 0$ et est de **périodicité infinie**.
   - L'état 4 est également **transitoire** car une fois quitté, on ne peut pas revenir à l'état 4.
   - Les états 2 et 3 sont également **transitoire**, car une fois la chaîne $2-3$ quittée, on ne peut y revenir.
   - Les états 5 et 6 sont **récurrents** car une fois dans la chaîne $5-6$, on y reste.

   Il n'y a pas d'état absorbant.
   Les états $2, 3, 4, 5$ et 6 sont apériodiques (car $p_{i,i} > 0$ si $i \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$).

f. 0 et 1 communiquent. 2 et 3 sont accessibles à partir de 1 et 0 respectivement. La chaîne n'est donc pas irréductible.
   - Les états 0 et 1 sont transitoires, car une fois la chaîne $0-1$ quittée, on n'y revient pas. Ils sont également apériodiques car $p_{0,0} > 0$ et $p_{1,1} > 0$.
   - Les états 2 et 3 sont **absorbants**, **apériodique** et **récurrents**.

   La chaîne est donc apériodique, puisque tous ses états le sont.

Exercice 4 - matrice de transition

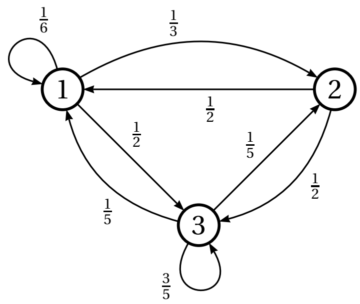
Soit $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que P est une matrice stochastique.
2. Soit $(\mathrm{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une CMTDH d'espace d'états $\{1, 2, 3\}$ et de matrice de transition P. Dessiner le graphe de transition de (X_n).
3. Quelles sont les propriétés de (X_n) ?
4. A-t-on ergodicité ? Si oui, calculer le vecteur de probabilité stationnaire associé.
5. Calculer $\mathbb{P}(\mathrm{X}_{n+1} = 2 \,|\, \mathrm{X}_n = 1, \mathrm{X}_{n+1} \neq 1)$ (c'est la probabilité d'aller en 2 sachant que l'on **quitte** l'état 1).

Corrigé

1. Rapidement, on constate que la somme des coefficients de chaque ligne fait bien 1.

2. Le graphe de transition est donné par :



3. On constate que la chaîne est irréductible car tous les états communiquent. Etant finie, la chaîne est donc irréductible récurrente. Puisque 3 est apériodique, tous les états le sont et la chaîne est apériodique.
4. La chaîne est irréductible, apériodique, et le nombre d'états est fini. D'après le théorème ergodique principal, il y a ergodicité. Pour déterminer le vecteur de probabilité stationnaire, on résout $\pi P = \pi$ avec $\pi = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$ et $a+b+c=1$. On obtient alors

$$\pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{7}{36} & \frac{5}{9} \end{pmatrix}$$

5. On utilise la définition des probabilités conditionnelles :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{n+1}=2|X_n=1, X_{n+1}\neq 1) &= \mathbb{P}_{X_n=1}(X_{n+1}=2|X_{n+1}\neq 1) \\
&= \frac{\mathbb{P}_{X_n=1}((X_{n+1}=2)\cap(X_{n+1}\neq 1))}{\mathbb{P}_{X_n=1}(X_{n+1}\neq 1)} \\
&= \frac{\mathbb{P}_{X_n=1}(X_{n+1}=2)}{\mathbb{P}_{X_n=1}(X_{n+1}=2)+\mathbb{P}_{X_n=1}(X_{n+1}=3)} \\
&= \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}} = \frac{2}{5}
\end{aligned}$$