3

Chapitre

Généralités sur les fonctions

Résumé

Dans ce chapitre, on rappelle certaines généralités sur les fonctions, et on ajoute certains compléments permettant d'étudier les fonctions (parité, périodicité) ainsi que de nouvelles fonctions (valeur absolue, partie entière)

Objectifs

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① savoir déterminer certaines caractéristiques d'une fonction :

- parité et périodicité . . . . ☐
- les extrema d'une fonction . . . . ☐

② connaître les fonctions usuelles (variations, dérivées, représentation graphique) :

- fonctions affines et trinômes du second degré . . . . ☐
- fonctions valeur absolue, racine carrée et inverse . . . . ☐
- fonction partie entière . . . . ☐
- fonctions ln, exp et puissances . . . . ☐

> *« La nature préfère les croissances vertigineuses, ou résolument plus douces, les exposants et les logarithmes. La nature est par nature non linéaire. »*

Paolo Giordano (1982 –). *Contagions*

I. Généralités sur les fonctions

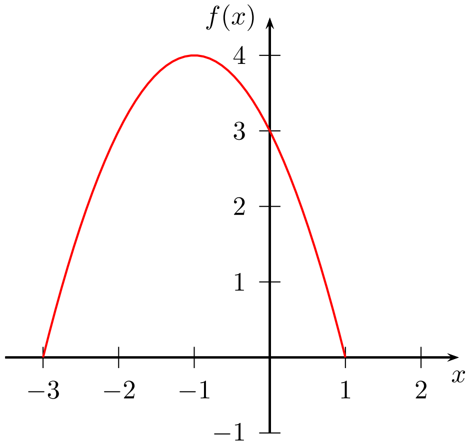
1. Notion de fonction

Définition 3.1.

On appelle **fonction** f, définie sur un domaine I, un objet qui, à partir d'un nombre x de I donné, associe **une unique image** noté $f(x)$.
On note $x \mapsto f(x)$ pour dire "x, on associe le nombre $f(x)$".

Exemple 3.1

- Fonction définie graphiquement :



- Fonction définie par une formule : $g(x) = 3x^2 + 1$
- Fonction définie par un tableau :

x	-2	-1	0	1	2
$h(x)$	1	-3	2	$\frac{1}{2}$	0

Définition 3.2.

On appelle **ensemble de définition** d'une fonction f, noté $\mathscr{D}_f$ en général, l'ensemble de tous les nombres x où on peut calculer $f(x)$ (c'est à dire, où $f(x)$ est définie).

Exemple 3.2

Dans les exemples précédents :

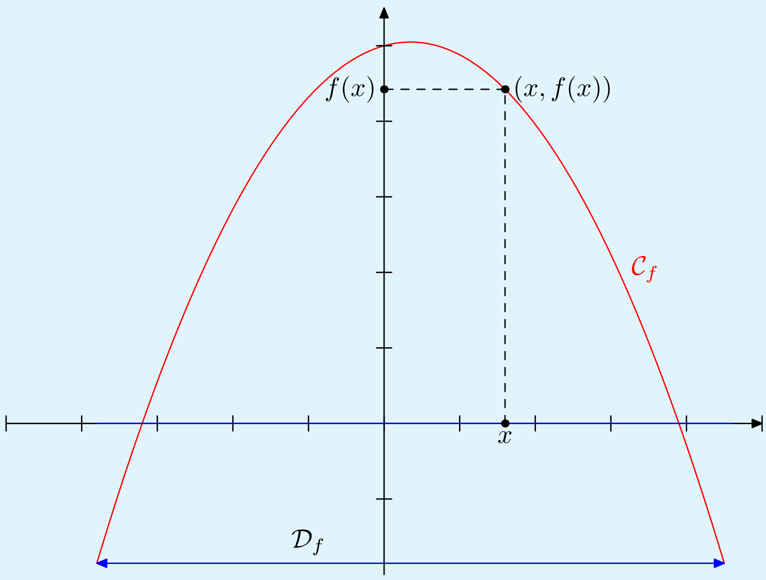
- f est définie graphiquement sur $[-3;1]$: en effet, on ne peut calculer $f(x)$ que si $-3 \leqslant x \leqslant 1$.
- g est définie sur $\mathbb{R}$: en effet, pour tout nombre réel x, on peut calculer $3x^2+1$, et donc $g(x)$.
- h est définie sur $\{-2;-1;0;1;2\}$.

2. Courbe représentative

Définition 3.3.

Soit f une fonction définie sur $\mathscr{D}_f$. Soit $(O;I;J)$ un repère (en général orthonormé) du plan. La ...

courbe représentative (ou représentation graphique) de f, notée $\mathscr{C}_f$, est l'ensemble des points $(x; f(x))$ où x décrit l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de f.



3. Parité et imparité

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle, définie sur $\mathscr{D}_f$, de courbe représentative $\mathscr{C}_f$.

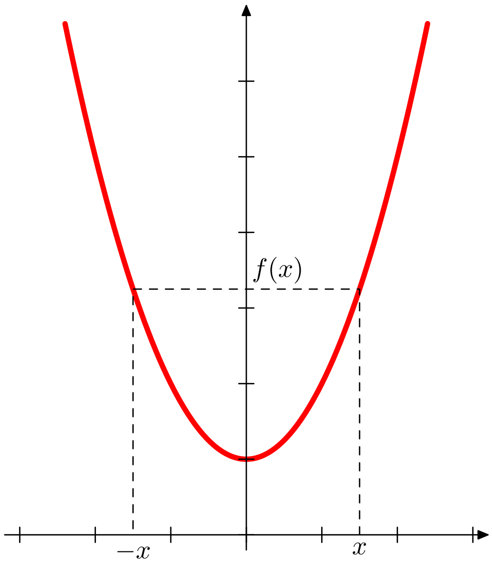
Définition 3.4.

f est dite **paire** si

- $\forall\ x \in \mathscr{D}_f, \quad -x \in \mathscr{D}_f$ (le domaine de définition est symétrique par rapport à 0).
- $\forall\ x \in \mathscr{D}_f, \quad f(-x) = f(x)$

Remarque

f est paire si et seulement si $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



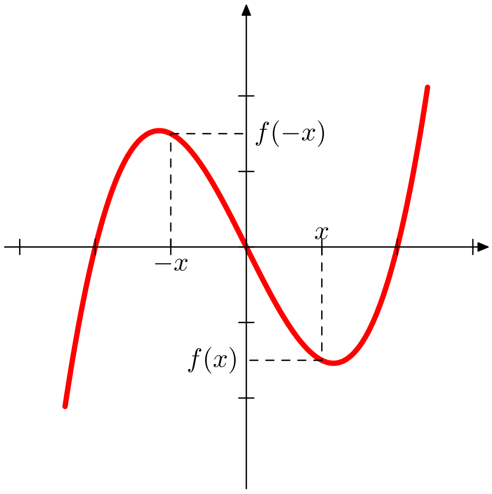
Définition 3.5.

f est dite **impaire** si

- $\forall\, x \in \mathscr{D}_f, \quad -x \in \mathscr{D}_f$ (le domaine de définition est symétrique par rapport à 0).
- $\forall\, x \in \mathscr{D}_f, \quad f(-x) = -f(x)$

Remarque

f est impaire si et seulement si $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine.



Exemple 3.3

La fonction carrée $f : x \longmapsto x^2$ est une fonction paire ; la fonction inverse $x \longmapsto \frac{1}{x}$ est une fonction impaire. En effet,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad (-x)^2 = x^2 \quad \text{et} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^*, \quad \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x}$$

Méthode

Pour déterminer la parité d'une fonction, on procède en deux étapes :

- On vérifie que le domaine est bien symétrique par rapport à 0.
- Pour un certain x dans $\mathscr{D}_f$ on calcule $f(-x)$ et on essaie de retrouver $f(x)$ ou $-f(x)$.

Exemple 3.4

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout x par

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$$

Déterminer la parité de f.

Solution

Le domaine de définition de f est $\mathbb{R}$ qui est bien symétrique par rapport à 0. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a alors

$$f(-x) = \mathrm{e}^{-(-x)^2} = \mathrm{e}^{-x^2} = f(x)$$

La fonction f est donc paire.

Méthode

Pour démontrer qu'une fonction n'est ni paire, ni impaire, on exhibe un contre-exemple : on cherche deux réels x et y dans $\mathcal{D}_f$ tels que $f(-x) \neq f(x)$ et $f(-y) \neq -f(y)$ (selon le cas, cela peut être le même réel).

Exemple 3.5

Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout réel x par $f(x) = x^2 + x$ n'est ni paire, ni impaire.

Solution

En effet, on constate que, pour $x = 1$, on a

$$f(-1) = (-1)^2 + (-1) = 0$$

alors que $f(1) = 1^2 + 1 = 2$. Donc $f(-1) \neq f(1)$ et $f(-1) \neq -f(1)$: la fonction n'est ni paire, ni impaire.

4. Périodicité

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle, de courbe représentative $\mathscr{C}_f$.

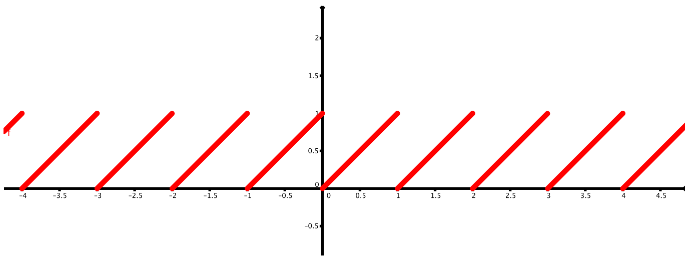
Définition 3.6.

On dit que f est **périodique** de période $T > 0$ si :

- $\forall\, x \in \mathcal{D}_f, \quad x + T \in \mathcal{D}_f$
- $\forall\, x \in \mathcal{D}_f, \quad f(x + T) = f(x)$

Remarque

La courbe représentative d'une fonction périodique n'est donc qu'une répétition de sa représentation sur $[0; T]$. La fonction suivante est périodique, de période 1 :



5. Sens de variation

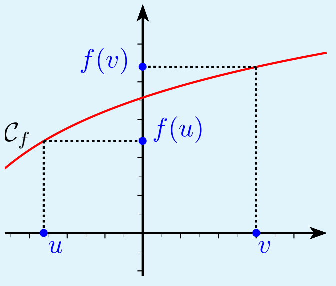
Définition 3.7.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, de courbe représentative $\mathscr{C}_f$ dans un repère.

On dit que f est **croissante** sur I si, pour tous nombres réels u et v de l'intervalle I on a

$$\text{Si } u < v \text{ alors } f(u) \leqslant f(v)$$

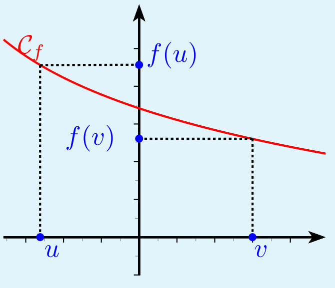
Une fonction croissante conserve l'ordre



On dit que f est **décroissante** sur I si, pour tous nombres réels u et v de l'intervalle I on a

$$\text{Si } u < v \text{ alors } f(u) \geqslant f(v)$$

Une fonction décroissante change l'ordre



Remarque

On définit également la croissance stricte et la décroissance stricte. Une fonction f définie sur un intervalle I est dite **strictement croissante** lorsque pour tout u, v de l'intervalle I

$$\text{Si } u < v \text{ alors } f(u) < f(v)$$

Propriété 3.1.

- La somme de deux fonctions croissantes (resp. décroissante) est croissante (resp. décroissante).
- La composée de deux fonctions ayant le même sens de variation est croissante.
- La composée de deux fonctions ayant des sens de variations contraires est décroissante.

Démonstration

- Soit $x < y$. Si f et g sont croissantes, alors $f(x) \leqslant f(y)$ et $g(x) \leqslant g(y)$. En additionnant les inégalités, $f(x)+g(x) \leqslant f(y)+g(y)$: $f+g$ est bien croissante.
- Soit $x < y$ et f, g deux fonctions croissantes. Alors $f(x) \leqslant f(y)$. Puisque g est croissante, on a également $g(f(x)) \leqslant g(f(y))$: $g \circ f$ est bien croissante.

Les autres inégalités se démontrent de la même manière.

⚠ Attention

La somme d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante peut tout donner !

Théorème 3.2.

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une application strictement monotone. Alors f est bijective de I sur $f(\mathrm{I})$.

Démonstration

f est par définition surjective sur $f(\mathrm{I})$. Enfin, si $x \neq x'$, $f(x) \neq f(x')$ car la fonction f est strictement monotone : donc f est injective, et donc bijective.

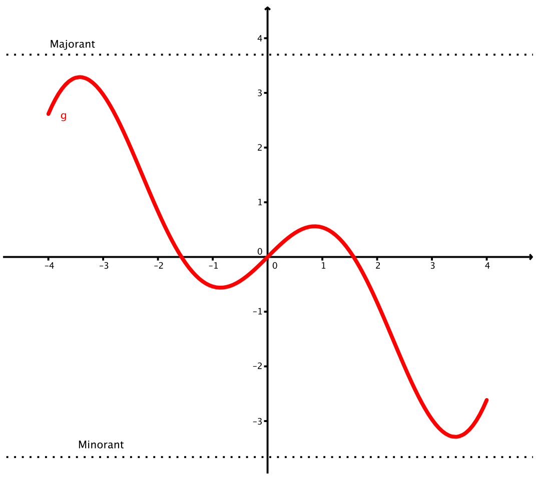
☞ *Exercice 1.*

6. Majorant-Minorant

Définition 3.8.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- f est dite **majorée** sur I s'il existe un réel M tel que,
$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad f(x) \leqslant \mathrm{M}$$
M est appelé un **majorant** de f sur I.
- f est dite **minorée** sur I s'il existe un réel m tel que,
$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad f(x) \geqslant m$$
m est appelé un **minorant** de f sur I.
- f est dite **bornée** sur I si elle est à la fois majorée et minorée.

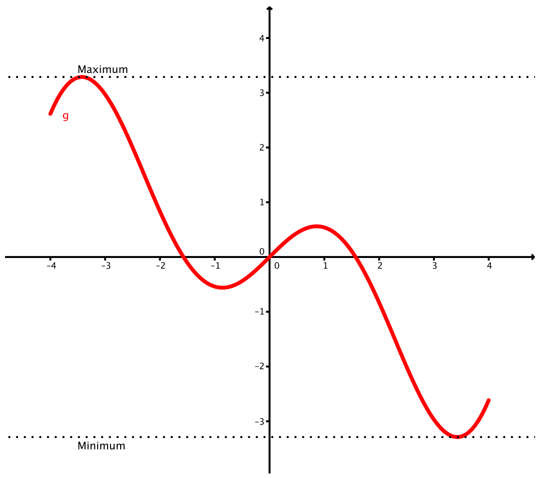


7. Maximum-Minimum

Définition 3.9.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit a un nombre réel de l'intervalle I.

- On dit que f admet un **maximum** en a si, pour tout réel x de I, on
$$f(x) \leqslant f(a)$$
On note $\max\limits_{x\in \mathrm{I}} f(x) = f(a)$.
- On dit que f admet un **minimum** en a si, pour tout réel x de I, on
$$f(x) \geqslant f(a)$$
On note $\min\limits_{x\in \mathrm{I}} f(x) = f(a)$.



Remarque

On dit que $f(a)$ est un **extremum** de f sur I si $f(a)$ est un minimum ou un maximum de f sur I.
Si $f(a)$ est un extremum sur un intervalle ouvert contenant a, mais pas sur I tout entier, on dit que $f(a)$ est un **extremum local** en a.

II. Fonctions de référence

1. Fonctions affines

Définition 3.10.

Une fonction affine est une fonction de la forme $f : x \longmapsto ax+b$, où a et b sont des réels fixés.
a est appelé le **coefficient directeur** de f et b son **ordonnée à l'origine**.

Proposition 3.3.

Sa courbe représentative est une droite.
On rappelle le tableau de signe et variations :

- Si $a>0$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
Signe de f		$-$	0	$+$	
Variation de f	$\nearrow$		0	$\nearrow$	

- Si $a<0$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
Signe de f		$+$	0	$-$	
Variation de f	$\searrow$		0	$\searrow$	

2. Fonction trinômes

Définition 3.11.

On appelle fonction **trinôme du second degré** à coefficients réels une fonction de la forme $f : x \longmapsto ax^2 + bx + c$, avec a, b et c trois réels fixes et $a \neq 0$.

Proposition 3.4.

Sa courbe représentative est une parabole.
On rappelle son tableau de variations :

- Si $a > 0$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
Variation de f		$\searrow$	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	$\nearrow$	

- Si $a < 0$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
Variation de f		$\nearrow$	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	$\searrow$	

Proposition 3.5.

On appelle **discriminant** du trinôme $f : x \longmapsto ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$, f admet deux racines :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

  Il se factorise en $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ et son tableau de signe est donné par (en supposant ici que $x_1 < x_2$) :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
Signe de f		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

- Si $\Delta = 0$, f admet une racine $x_0 = -\frac{b}{2a}$. Il se factorise en $f(x) = a(x - x_0)^2$ et son tableau de signe est donné par

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
Signe de f		signe de a	0	signe de a	

- Si $\Delta < 0$, f n'admet pas de racine réelle et ne se factorise pas sur $\mathbb{R}$. Son tableau de signe est donné par

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de f		signe de a	

3. Fonction valeur absolue

Définition 3.12.

La fonction **valeur absolue** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

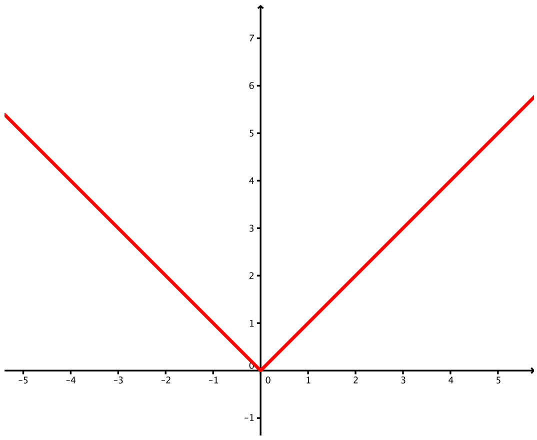
$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ -x & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{cases}$$

Exemple 3.6

$|3| = 3$ et $|-4| = 4$.

Remarque

Par construction, la valeur absolue est une fonction paire, décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$.



Propriété 3.6.

Soient x, y deux réels, et $n \in \mathbb{N}$.

- $|-x| = |x|$ (parité) $\quad |xy| = |x||y| \quad |x^n| = |x|^n \quad |x|^2 = x^2$
- Si $y \neq 0$, $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$
- $|x| = |y| \Leftrightarrow x = y$ ou $x = -y$
- Si $y > 0$, $\quad |x| \leqslant y \Leftrightarrow -y \leqslant x \leqslant y$
- Si $y > 0$, $\quad |x| \geqslant y \Leftrightarrow x \leqslant -y$ ou $x \geqslant y$

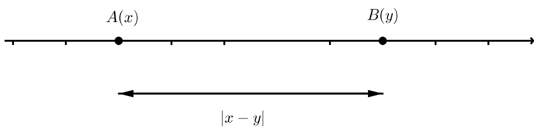
Théorème 3.7. Inégalité triangulaire

Pour tous réels x et y,

$$|x + y| \leqslant |x| + |y| \quad \text{et} \quad \big||x| - |y|\big| \leqslant |x - y|$$

Remarque

Si x et y sont des réels, $|x - y|$ représente la distance entre les points A d'abscisse x et B d'abscisse y.



Ainsi $|4-1|=3$ car la distance entre le point A(1) et le point B(4) est de 3.

Démonstration

Calculons $(|x|+|y|)^2-|x+y|^2$:

$$\begin{aligned}(|x|+|y|)^2-|x+y|^2 &= (|x|^2+2|x|\cdot|y|+|y|^2)-(x+y)^2\\ &= x^2+2|x|\cdot|y|-(x^2+2xy+y)\\ &= 2(|xy|-xy)\end{aligned}$$

Or, par définition de la valeur absolue, $|xy|-xy\geqslant 0$. Donc $(|x|+|y|)^2-|x+y|^2\geqslant 0$, c'est-à-dire

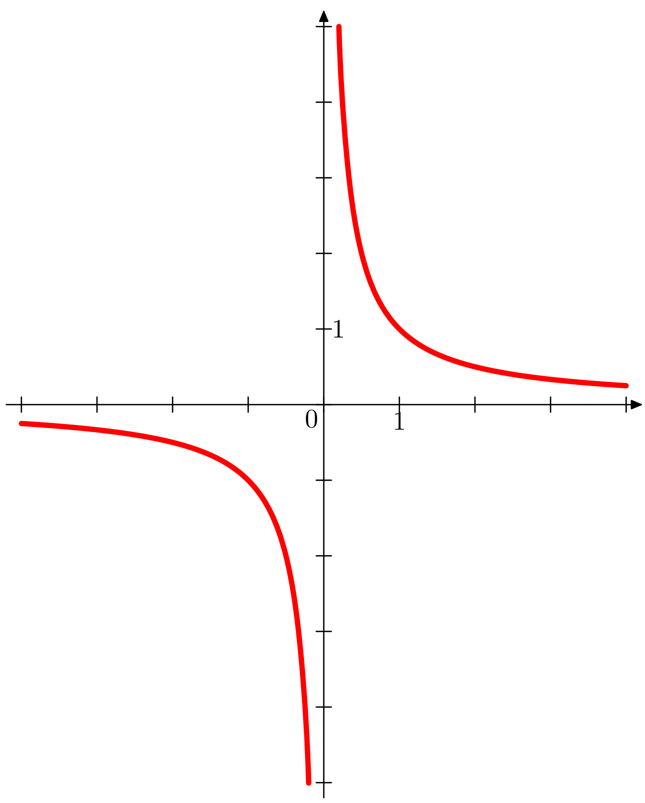
$$(|x|+|y|)^2\geqslant|x+y|^2$$

Puisque les deux nombres $|x|+|y|$ et $|x+y|$ sont positifs, cela implique que $|x|+|y|\geqslant|x+y|$.
La deuxième inégalité se traite de la même manière.

4. Fonctions racine carrée et inverse

Définition 3.13.

La fonction **inverse** est la fonction f, définie sur $\mathbb{R}^*$, par $f(x)=\frac{1}{x}$.



Propriété 3.8.

- La fonction inverse est impaire : $\forall\ x \in \mathbb{R}^*$, $\frac{1}{-x} = -\frac{1}{x}$.
- Son tableau de variations est :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	$\|\|$	$\nearrow$

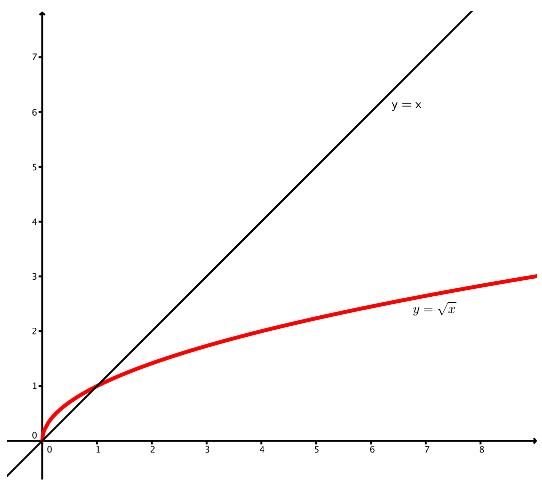
- Pour tout réel $a \neq 0$, $\frac{1}{x} = a \Leftrightarrow x = \frac{1}{a}$.

Définition 3.14.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ est l'unique réel positif dont le carré est x :

$$\sqrt{x} > 0 \quad \text{et} \quad (\sqrt{x})^2 = x$$

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est appelée **fonction racine carrée**.



Propriété 3.9.

- $\sqrt{0} = 0$, $\sqrt{1} = 1$.
- Pour tous réels positifs x et y :

$$\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}, \qquad (\sqrt{x})^2 = x \qquad \text{et si } y \neq 0,\ \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{x}{y}}$$

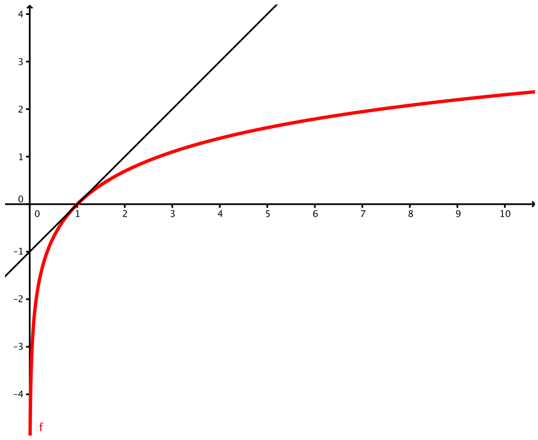
- Pour tout réel x, $\sqrt{x^2} = |x|$.

5. Fonction logarithme népérien

Définition 3.15.

La fonction **logarithme népérien**, notée ln, est l'unique fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que

$$\forall\ x > 0, \quad \ln'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad \ln(1) = 0$$



Propriété 3.10.

- La fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

- Pour tous réels x et y de $\mathbb{R}_+^*$,

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y) \quad \text{et} \quad \ln\left(\frac{1}{y}\right) = -\ln(y)$$

Ainsi,

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y) \qquad \forall\, n \in \mathbb{Z}, \quad \ln(x^n) = n\ln(x)$$

$$\ln\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2}\ln(x)$$

- Grâce à la stricte croissance de ln, pour tous réels x, y strictement positifs :

$$\ln(x) = \ln(y) \Leftrightarrow x = y \quad \text{et} \quad \ln(x) < \ln(y) \Leftrightarrow x < y$$

En particulier $\ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ et $\ln(x) = 1 \Leftrightarrow x = \mathrm{e}$ avec $\mathrm{e} \approx 2,718$.

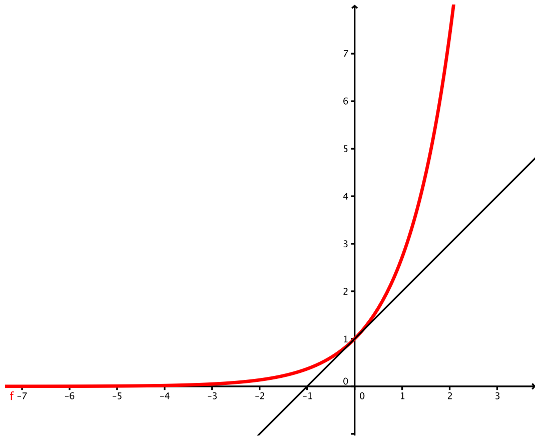
RÉFÉRENCE HISTORIQUE

John Neper inventa les logarithmes vers 1613. Le logarithme le plus utilisé (dit en “base e”) porte ainsi son nom.

6. Fonction exponentielle

Définition 3.16.

La fonction **exponentielle**, noté exp, est l'unique fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée est elle-même, et telle que $\exp(0) = 1$. On note $\exp(x) = \mathrm{e}^x$.



♡ **Propriété 3.11.**

- La fonction exp est strictement croissante et positive sur $\mathbb{R}$.
- Par définition, $e^0 = 1$, et $e^1 = e$.
- Pour tous réels x et y,

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y) \quad \text{et} \quad \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$$

Ainsi,

$$\exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)} \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{Z},\quad (\exp(x))^n = \exp(nx)$$

- Grâce à la stricte croissance de exp, pour tout réels x et y :

$$\exp(x) = \exp(y) \Leftrightarrow x = y \quad \text{et} \quad \exp(x) < \exp(y) \Leftrightarrow x < y$$

RÉFÉRENCE HISTORIQUE

Le mot “exponentiel” a été introduit pour la première fois par **Jean Bernoulli** en 1694, dans une correspondance avec **Leibniz**. La notation e est due à **Leonhard Euler**, utilisée pour la première fois en 1728.

Remarque

La fonction exponentielle est la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien :

- Pour tout réel x, $\ln(e^x) = x$.
- Pour tout réel $x > 0$, $e^{\ln(x)} = x$.
- Pour tout réel x, et tout réel $y > 0$, $e^x = y \Leftrightarrow x = \ln(y)$.

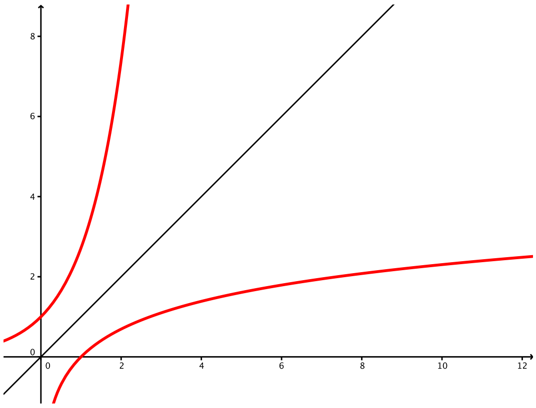
Ainsi, on retiendra également que $\ln(e) = 1$.

Propriété 3.12. Comparaison ln, exp, $x \mapsto x$

Pour tout réel $x > 0$, on a

$$\ln(x) \leqslant x \leqslant \exp(x)$$

et les courbes représentatives de exp et ln sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



7. Fonctions puissances

Les fonctions puissances généralisent les fonctions $x \mapsto x^n$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Définition 3.17.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout réel $x \in \mathbb{R}_+^*$, on note

$$x^\alpha := e^{\alpha \ln(x)}$$

Remarque

Attention : l'écriture x^α n'est qu'une notation. En pratique, on repassera toujours à l'écrire $e^{\alpha \ln(x)}$.

♡ **Propriété 3.13.**

Les fonctions puissances possèdent les mêmes règles de calcul que les puissances entières :

- $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$.
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad (x \times y)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$ et $x^{-\alpha} = \dfrac{1}{x^\alpha}$. Ainsi,

$$\left(x^\alpha\right)^\beta = x^{\alpha\beta}, \qquad x^{\alpha-\beta} = \frac{x^\alpha}{x^\beta} \quad \text{et} \quad \left(\frac{x}{y}\right)^\alpha = \frac{x^\alpha}{y^\alpha}$$

Démonstration

Les démonstrations sont toutes sur le même modèle. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $x > 0$. Alors

$$x^{\alpha+\beta} = e^{(\alpha+\beta)\ln(x)} = e^{\alpha\ln(x)+\beta\ln(x)} = e^{\alpha\ln(x)}e^{\beta\ln(x)} = x^\alpha x^\beta$$

où on utilise les propriétés de la fonction exponentielle.

Remarque

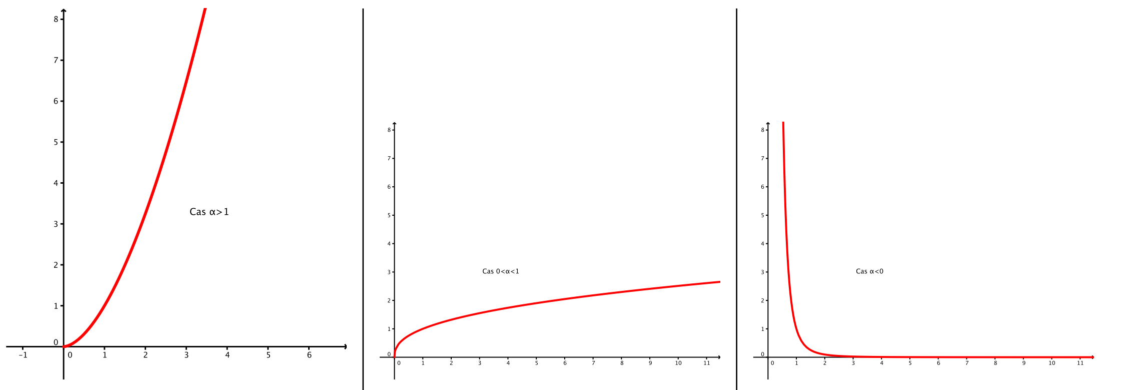
Ainsi, pour tout $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n = x$$

En particulier, $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ pour $x > 0$. Par abus d'écriture, on confondra les deux écritures pour $x \geqslant 0$.

La représentation graphique des fonctions puissances dépend de α :

Propriété 3.14.



Cas $\alpha > 1$ Cas $0 < \alpha < 1$ Cas $\alpha < 0$

Remarque

On dispose d'autres fonctions puissances, dans le cas où la variable x est un exposant.
Pour tout réel $a > 0$, on définit la fonction $x \longmapsto a^x$ par

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ a^x = e^{x\ln(a)}$$

Ainsi, les fonctions du type $x \longmapsto x^\alpha$ sont définies sur $\mathbb{R}_+^*$, alors que les fonctions du type $x \longmapsto a^x$ sont définies sur $\mathbb{R}$. Dans les deux cas, elles vérifient les propriétés sur les puissances.

☞ *Exercices 2, 3, 4 et 5.*

8. Fonction partie entière

Définition 3.18.

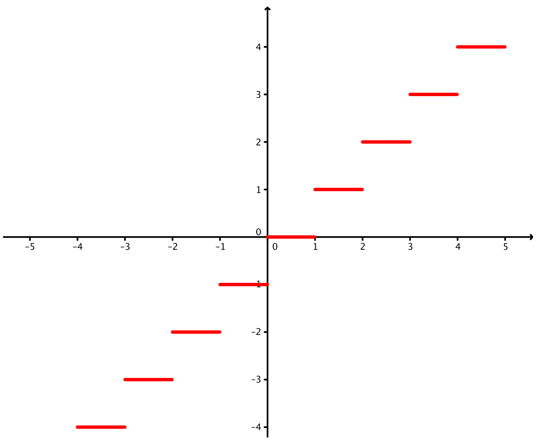
Soit x un nombre réel. On appelle **partie entière** de x, et on note $E(x)$, $[x]$ ou $\lfloor x \rfloor$, le plus grand nombre entier inférieur ou égal à x.

Remarque

On utilisera en général la notation $[x]$, voire $\lfloor x \rfloor$.

Exemple 3.7

Ainsi, $[3,2] = 3$, $[\pi] = 3$, $[-3,2] = -4$.



Propriété 3.15.

- $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$.
- $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \lfloor x \rfloor \leqslant x$ par définition.
- $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad x < \lfloor x \rfloor + 1$ aussi par définition. Ainsi,

  $$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$$

  On a également la relation

  $$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$$

- La fonction partie entière est constante par morceaux : pour tout $x \in [n; n+1[$ (où $n \in \mathbb{Z}$), $\lfloor x \rfloor = n$.

Définition 3.19.

Soit x un nombre réel. On appelle **partie entière supérieure**, et on note $\lceil x \rceil$, le plus petit nombre entier supérieur ou égal à x.

Remarque

On dispose également d'une inégalité pratique : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\lceil x \rceil - 1 < x \leqslant \lceil x \rceil$.

☞ *Exercice 8.*

9. Maximum, minimum de deux fonctions

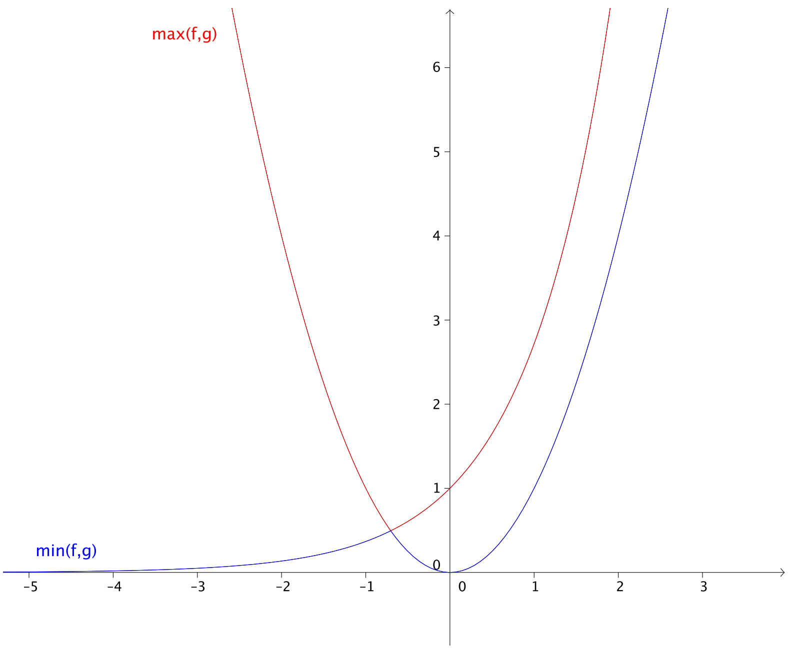
Définition 3.20.

Soient f et g deux fonctions définies sur un même intervalle I.

- On appelle **maximum** de f et g, et on note $\max(f,g)$ l'application qui à tout réel $x \in \mathrm{I}$ associe le plus grand des deux nombres $f(x)$ et $g(x)$.
- On appelle **minimum** de f et g, et on note $\min(f,g)$ l'application qui à tout réel $x \in \mathrm{I}$ associe le plus petit des deux nombres $f(x)$ et $g(x)$.

Exemple 3.8

Si $f : x \longmapsto x^2$ et $g : x \longmapsto \mathrm{e}^x$, on obtient la figure suivante :



Théorème 3.16.

Soient f et g deux fonctions définies sur un même intervalle I. Alors, pour tout réel $x \in \mathrm{I}$:

$$\max(f,g)(x) = \frac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2} \quad \text{et} \quad \min(f,g)(x) = \frac{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|}{2}$$

Démonstration

Si $f(x) \geqslant g(x)$, alors $|f(x)-g(x)| = f(x)-g(x)$ et donc

$$\frac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2} = \frac{f(x)+g(x)+f(x)-g(x)}{2} = f(x) = \max(f,g)(x)$$

$$\frac{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|}{2} = \frac{f(x)+g(x)-(f(x)-g(x))}{2} = g(x) = \min(f,g)(x)$$

Si cette fois-ci $f(x) < g(x)$ alors $|f(x)-g(x)| = |g(x)-f(x)| = g(x)-f(x)$. Ainsi :

$$\frac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2} = \frac{f(x)+g(x)+g(x)-f(x)}{2} = g(x) = \max(f,g)(x)$$

$$\frac{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|}{2} = \frac{f(x)+g(x)-(g(x)-f(x))}{2} = f(x) = \min(f,g)(x)$$

Exercices

Exercices

Calculs et démonstrations

●●○ **Exercice 1** (10 min.)

Déterminer le sens de variations des fonctions $x \mapsto ax+b$ $(a \neq 0)$, $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$ en revenant à la définition.

●○○ **Exercice 2 Puissances, logarithmes et exponentielles** (10 min.)

1. Exprimer les puissances suivantes à l'aide de puissance de 2 et de 3 :
$$4^4 \qquad 9^7 \qquad 6^3 \qquad 36^4$$
2. Exprimer $\ln(24)$, $\ln(72)$ et $\ln(\sqrt{12})$ en fonction de $\ln(2)$ et $\ln(3)$.
3. Simplifier les expressions suivantes :

$$A = \frac{\exp(2x^2-1)}{\exp(2x-1)} \qquad C = \frac{\ln(2x)}{\ln(x)} \qquad E = \exp(\ln(3))$$
$$F = \exp(3\ln(2))$$
$$B = \exp(x^2+1) - (\exp(x))^2 \qquad D = \ln(2x) - \ln(x) \qquad G = \exp(-\ln(5))$$

Equations, inéquations

●○○ **Exercice 3** (25 min.)

Résoudre les équations suivantes :

1. $(E_1) : x^4 + x^2 - 2 = 0$
2. $(E_2) : \exp(2x) + \exp(x) - 6 = 0$
3. $(E_3) : \ln(x)^2 + 2\ln(x) - 3 = 0$.
4. $(E_4) : x = \sqrt{x} + 2$
5. $(E_5) : e^x + e^{-x} = 2$

▶ ***Méthode***

On rappelle que dans le cas d'équation proche d'une équation du second degré, on change de variable inconnue pour se ramener à une équation de ce type.

●○○ **Exercice 4** (30 min.)

Résoudre les inégalités suivantes :

1. $(2x+1)(3x-1) > 0$
2. $\dfrac{4x+3}{2x+1} \geqslant 0$
3. $\dfrac{1-2x}{x+1} > 0$
4. $5x^2 - 10x + 4 \leqslant 0$
5. $\ln(2x+1) \leqslant \ln(x+7)$

6. $2x^3+2x \leqslant -2x$
7. $2^x \geqslant 3^{x-1}$

●●○ Exercice 5 (10 min.)

Montrer les résultats suivants :

$$\forall\, x>0,\quad \sqrt{\frac{2}{x+1}} \geqslant \sqrt{\frac{2}{x+4}} \qquad\qquad \forall\, x,\quad \mathrm{e}^{2x+1} \leqslant \mathrm{e}^{x^2+2}$$

Définitions et parités

●○○ Exercice 6 Domaine de définition (10 min.)

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \frac{\sqrt{2x+1}}{x^2+5x+6} \qquad\qquad g : x \mapsto \ln\left(2x^2+2x-12\right)$$

●○○ Exercice 7 Parités (15 min.)

Déterminer la parité des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \frac{\ln(x^2+1)}{x^4+1} \qquad\qquad g : x \mapsto \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \qquad\qquad h : x \mapsto x(x^2+2)^3(\mathrm{e}^{x^2+1}+3)$$

Pour aller plus loin

●●○ Exercice 8 (10 min.)

Soit $f : x \mapsto x-[x]$. Etudier la monotonie de f. Que représente $f(x)$ pour un réel x ? Représenter f.

●●○ Exercice 9 (10 min.)

Soit $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ définie pour tout entier x par $f(x)=(-1)^x$. Déterminer l'image de la fonction f, $f(\mathbb{Z})$. Déterminer l'image réciproque par f de $\{1\}$.

●○○ Exercice 10 (10 min.)

Soit (E) : $mx^2+x(2m-1)-2=0$ où x et m sont des réels.

1. Soit m fixé. Résoudre l'équation (E) d'inconnue x.
2. Soit x fixé. Résoudre l'équation (E) d'inconnue m.