

2

Chapitre

Utilisation des symboles Σ et Π

Résumé

Le but de ce (petit) chapitre est d'introduire les symboles Σ et Π que l'on utilisera régulièrement au cours de l'année.

Objectifs

La liste ci-dessous représente les éléments à maîtriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

- ① maîtriser les symboles Σ et Π :
 - le changement de variable dans une somme
 - la simplification d'une somme télescopique
- ② connaître la définition de la factorielle
- ③ connaître les propriétés de la factorielle

I. Définitions et propriétés

1. Définition

Définition 2.1.

Soient n et p deux entiers tels que $p < n$. On note $\llbracket p, n \rrbracket = \{p; p+1; \dots; n\}$.

Exemple 2.1

Par exemple, $\llbracket 2, 5 \rrbracket = \{2, 3, 4, 5\}$.

Remarque

Il y a n entiers dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, et $n+1$ entiers dans $\llbracket 0, n \rrbracket$. Il y a $n-p+1$ entiers dans $\llbracket p, n \rrbracket$.

Exemple 2.2

Il y a 7 entiers dans $\llbracket 2, 8 \rrbracket$.

Définition 2.2.

- Soient a_0, a_1, \dots, a_n des réels. On note

$$\sum_{k=0}^n a_k = a_0 + a_1 + \dots + a_n$$

et on lit “somme de $k=0$ à n des a_k ”.

- Soient a_p, \dots, a_n des réels ($p \leq n$). On note

$$\sum_{k=p}^n a_k = a_p + \dots + a_n$$

et on lit “somme de $k=p$ à n des a_k ”.

Exemple 2.3

Par exemple, $\ln(2) + \ln(3) + \dots + \ln(n) = \sum_{k=2}^n \ln(k)$.

Exercice 2.4

Ecrire la notation en extension de $\sum_{k=2}^{30} k$ et $\sum_{n=1}^p \sqrt{n}$.

Ecrire à l'aide du symbole Σ l'expression $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ et $2 + 4 + 6 + \dots + 18$.

Solution

On a, rapidement :

- $\sum_{k=2}^{30} k = 2 + 3 + \dots + 30$,
- $\sum_{n=1}^p \sqrt{n} = 1 + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{p}$,

- $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$,
- $2 + 4 + \dots + 18 = \sum_{k=1}^9 2k$.

Remarque

L'ordre de la sommation n'a pas d'importance. Ainsi $\sum_{k=1}^n k^2$ représente la même somme que

$$\sum_{k=n}^1 k^2.$$

Remarque

On définit de la même manière $a_p \times a_{p+1} \times \dots \times a_n = \prod_{k=p}^n a_k$.

Définition 2.3. Factorielle

Soit n un entier non nul. On appelle **factorielle** de n , et on note $n!$, le nombre $n! = \prod_{k=1}^n k$.

Par convention, $0! = 1$.

Remarque

On a ainsi $1! = 1$, $2! = 1 \times 2 = 2$ et $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$.

Proposition 2.1.

Pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$(n+1)! = (n+1) \times n!$$

Démonstration

En effet, par définition,

$$(n+1)! = \underbrace{1 \times 2 \times \dots \times n}_{=n!} \times (n+1) = n! \times (n+1)$$

Exercice 2.5

Pour $n \geq 1$, simplifier $\frac{(n+2)!}{n!}$.

Solution

On a

$$\frac{(n+2)!}{n!} = \frac{(n+2)(n+1)n!}{n!} = (n+2)(n+1)$$

2. Première propriétés

Soient deux entiers p et n tels que $p \leq n$, soient $a_p, \dots, a_n, b_p, \dots, b_n$ des réels.

- Linéarité :

$$\sum_{k=p}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=p}^n a_k + \sum_{k=p}^n b_k$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \sum_{k=p}^n \lambda \cdot a_k = \lambda \sum_{k=p}^n a_k$$

- Relation de Chasles : pour tout entier $m > n$,

$$\sum_{k=p}^m a_k = \sum_{k=p}^n a_k + \sum_{k=n+1}^m a_k$$

- $\prod_{k=p}^n (a_k \times b_k) = \prod_{k=p}^n a_k \times \prod_{k=p}^n b_k$
- $\forall \lambda, \prod_{k=p}^n (\lambda a_k) = \lambda^{n-p+1} \prod_{k=p}^n a_k$

3. ln et exp

Propriété 2.2.

- Pour tous réels a_p, \dots, a_n , on a

$$\exp\left(\sum_{k=p}^n a_k\right) = \prod_{k=p}^n e^{a_k}$$

- Pour tous réels $a_p > 0, \dots, a_n > 0$, on a

$$\ln\left(\prod_{k=p}^n a_k\right) = \sum_{k=p}^n \ln(a_k)$$

4. Sommes usuelles



Proposition 2.3.

On dispose des résultats suivants :

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \text{ (si } q \neq 1)$$

Démonstration

Elles ont été vues dans le chapitre précédent.

II. Changement de variables

1. Variables muettes

Remarque

Lorsqu'on écrit $\sum_{k=p}^n a_k$, la variable k est appelée **variable muette** : on peut la remplacer par n'importe quelle autre lettre non utilisée :

$$\sum_{k=p}^n a_k = \sum_{i=p}^n a_i = \sum_{z=p}^n a_z$$

2. Changement de variable

Puisque la variable d'une somme est muette, on peut faire un changement de variable, qui consiste à ré-écrire la somme différemment.

Proposition 2.4.

Soient $p \leq n$ deux entiers, l un entier, et a_{p+l}, \dots, a_{n+l} des réels. Alors

$$\sum_{k=p+l}^{n+l} a_k = \sum_{j=p}^n a_{j+l}$$

On a effectué le changement de variable $j = k - l$: ainsi, si $k = p + l$, alors $j = p$. De même, $k = n + l$ amène $j = n$.

Méthode

Pour faire un changement de variable $j = f(k)$, on procède en remplaçant toutes les occurrences de k par son expression en fonction de j , mais on n'oublie pas de changer les bornes en conséquence!

Exemple 2.6

Calculer $S = \sum_{k=0}^n (n-k)$ en posant $j = n-k$.

Solution

Posons $j = n-k$. Alors

$$S = \sum_{j=n}^0 j = \sum_{j=0}^n j$$

car l'ordre de la somme des termes n'importe pas. On a donc

$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$

3. Sommes doubles**Remarque**

On peut envisager de calculer des sommes de sommes. Dans ce cas, on fera attention à utiliser deux variables différentes.

Exemple 2.7

La somme suivante est une somme double :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n i j$$

Remarque

On peut calculer la somme précédente. En effet, lorsqu'on somme sur j , la variable i est une variable indépendante. Ainsi

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n i j = \sum_{i=1}^n i \sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{2} \frac{n(n+1)}{2} = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

Dans certains cas, on ne peut pas séparer les variables, quand une somme dépend d'une des variables. Par exemple,

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i j$$

Dans ce cas, on peut calculer la somme, mais en étant rigoureux :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i j = \sum_{i=1}^n \frac{i(i+1)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n i^2 + i = \frac{1}{2} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \right)$$

III. Sommes télescopiques

1. Définition

Définition 2.4.

Soient a_0, \dots, a_{n+1} des réels. On appelle **somme télescopique** une somme de la forme

$$\sum_{k=0}^n a_{k+1} - a_k$$

Exemple 2.8

La somme $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}$ est une somme télescopique.

2. Simplification

Proposition 2.5.

Soit $S_n = \sum_{k=0}^n a_{k+1} - a_k$. Alors

$$S_n = a_{n+1} - a_0$$

Démonstration

En effet,

$$S_n = (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \dots + (a_n - a_{n-1}) + (a_{n+1} - a_n) = -a_0 + a_{n+1}$$

Exemple 2.9

La somme $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}$ se simplifie en

$$S_n = \frac{1}{n+1} - 1$$

Exercice 2.10

Soit $S_n = \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$. Simplifier S_n .

Solution

On constate en effet, en utilisant les propriétés du logarithme, que

$$S_n = \sum_{k=1}^n \ln(k+1) - \ln(k)$$

La somme S_n est donc télescopique. On a donc

$$S_n = \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1)$$

3. Produits télescopiques

On peut définir également les produits télescopiques, avec un résultat assez similaire à celui des sommes télescopiques.

Définition 2.5.

Soient a_0, \dots, a_{n+1} des réels tous non nuls. On appelle **produit télescopique** un produit de la forme

$$\prod_{k=0}^n \frac{a_{k+1}}{a_k}$$

Exemple 2.11

Le produit

$$\frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \cdots \frac{n+1}{n} = \prod_{k=1}^n \frac{k+1}{k}$$

est un produit télescopique.

Proposition 2.6.

Soit $P_n = \prod_{k=0}^n \frac{a_{k+1}}{a_k}$ avec a_0, \dots, a_{n+1} tous non nuls. Alors $P_n = \frac{a_{n+1}}{a_0}$

