1

Chapitre

Raisonnement et vocabulaire ensembliste

Résumé

Ce chapitre introductif est très important. Il pose les bases nécessaires à l'ensemble de l'année :

- *les principes de raisonnement (récurrence, contraposée, absurde);*
- *les notions liées aux ensembles;*
- *les notions de bases sur les applications, qui feront l'objet de chapitres supplémentaires.*

Même si ce chapitre est un peu abrupt, il faut régulièrement y revenir pour maitriser l'ensemble des éléments présents.

Objectifs

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① mener un raisonnement par récurrence . . . . ☐

② maitriser les raisonnements élémentaires :

- le raisonnement par contraposée . . . . ☐
- le raisonnement par l'absurde . . . . ☐
- la justification d'équivalence et d'implication . . . . ☐

③ connaitre les notions essentielles sur les ensembles :

- la définition d'ensemble . . . . ☐
- l'union, l'intersection . . . . ☐
- le complémentaire . . . . ☐
- l'ensemble des parties . . . . ☐
- le produit cartésien . . . . ☐

④ connaître les notions importantes liées aux applications :

- la définition d'injection et les méthodes associées . . . . ☐
- la définition de surjection et les méthodes associées . . . . ☐
- la définition de bijection et les méthodes associées . . . . ☐
- la définition d'image directe . . . . ☐
- la définition d'image réciproque . . . . ☐
- la définition de restriction . . . . ☐

> *« La logique est l'hygiène des mathématiques. »*

André Weil (1906 – 1998)

I. Raisonnement par récurrence

1. Principe de récurrence

Le **raisonnement par récurrence** est un raisonnement important des mathématiques. Pour le comprendre, nous allons partir d'un exemple :

Exemple 1.1

On considère la proposition $\mathrm{P}(n)$ dépendant d'un entier n : « $2^n \geqslant n+1$ »

Vérifions que cette propriété est vraie pour $n = 0, 1, 2, 3, 4$:

Pour $n=0$: $2^0 = 1 \geqslant 0+1 = 1$
Pour $n=1$: $2^1 = 2 \geqslant 1+1 = 2$
Pour $n=2$: $2^2 = 4 \geqslant 2+1 = 3$
Pour $n=3$: $2^3 = 8 \geqslant 3+1 = 4$
Pour $n=4$: $2^4 = 16 \geqslant 4+1 = 5$

On peut continuer les vérifications pour tous les entiers que l'on souhaite, mais on ne pourra jamais affirmer que la proposition est vraie **pour tout entier** n. Pour démontrer cette proposition, on va faire appel au **raisonnement par récurrence**.

Axiome 1.1.

Soit $\mathrm{P}(n)$ une proposition dépendant d'un entier, et n_0 un entier fixé.

- Si $\mathrm{P}(n_0)$ est vraie (**initialisation**),
- et si pour tout entier $n \geqslant n_0$, $\mathrm{P}(n) \Rightarrow \mathrm{P}(n+1)$ (**hérédité**),

alors $\mathrm{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.

Démonstration

Ceci est un **axiome des mathématiques** : c'est une propriété de base, qui ne se démontre pas, mais qui semble « logique » .
L'idée est simple : si on peut poser la première brique d'un mur, et si à chaque fois qu'on a posé une brique, on peut en poser une autre par dessus, on peut effectivement construire un mur complet (infini, certes).

Remarque

Si, pour tout entier $n \geqslant n_0$, $\mathrm{P}(n) \Longrightarrow \mathrm{P}(n+1)$, on dit que la propriété P est **héréditaire**.

Solution

Démontrons maintenant la propriété $\mathrm{P}(n)$: « $2^n \geqslant n+1$ » pour $n \geqslant 0$ par récurrence :

- **initialisation** : pour $n=0$, on a bien $2^0 = 1 \geqslant 0+1 = 1$.
- **hérédité** : supposons que la propriété $\mathrm{P}(n)$ soit vraie pour **un certain** n fixé. On a donc $2^n \geqslant n+1$: c'est **l'hypothèse de récurrence**
  On veut alors démontrer $\mathrm{P}(n+1)$, *c'est à dire* $2^{n+1} \geqslant (n+1)+1$

$$\begin{array}{llrcll}
\text{Si } 2^n \geqslant n+1 & \text{alors} & 2\times 2^n & \geqslant & 2(n+1) & \text{car } 2 \geqslant 0 \\
 & \text{puis} & 2^{n+1} & \geqslant & 2n+2 & \\
 & \text{donc} & 2^{n+1}-(n+1+1) & \geqslant & 2n+2-(n+1+1) & \\
 & \text{et enfin} & 2^{n+1}-(n+2) & \geqslant & n \geqslant 0 & \text{car } n \geqslant 0
\end{array}$$

On a donc bien $2^{n+1} \geqslant (n+1)+1$: la proposition $\mathrm{P}(n+1)$ est donc vérifiée, et P est donc héréditaire.

On a bien démontrer l'initialisation et l'hérédité : on a donc démontré par récurrence que la propriété $P(n)$ est vraie **pour tout entier** n :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ 2^n \geqslant n+1$$

Exercice 1.2

Démontrer par récurrence les propriétés suivantes :

1. $\forall\, n \geqslant 1,\ 1+\ldots+n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
2. $\forall\, n \geqslant 1,\ 1^2+\ldots+n^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Solution

1. Soit P la proposition définie pour tout $n \geqslant 1$ par P_n : « $1+\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ ».
   - Initialisation : pour $n=1$, on a d'une part la somme qui est réduite à un élément, 1, et d'autre part $\frac{1(1+1)}{2} = 1$. Donc P_1 est vraie.
   - Hérédité : supposons que la proposition P_n soit vraie pour un certain $n \geqslant 1$, et montrons que P_{n+1} est vraie.
     Par hypothèse de récurrence, on a donc
     $$1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$
     Or, $1+2+\ldots+(n+1) = (1+2+\ldots n)+(n+1)$. D'après l'hypothèse de récurrence, on a donc
     $$1+\ldots+n+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2}+(n+1) = (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right) = (n+1)\frac{n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$
     Ainsi, la proposition P_{n+1} est vraie, et la propriété P est donc héréditaire.

   D'après le principe de récurrence, la proposition P_n est donc vraie pour tout entier $n \geqslant 1$:
   $$\forall\, n \geqslant 1,\ \ 1+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$
2. Soit Q la proposition définie pour tout $n \geqslant 1$ par Q_n : « $1^2+\ldots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ».
   - Initialisation : pour $n=1$, on a d'une part $1^2 = 1$, et d'autre part $\frac{1(1+1)(2\times 1+1}{6} = \frac{6}{6} = 1$. Donc Q_1 est vraie.
   - Hérédité : supposons que la proposition Q_n soit vraie pour un certain $n \geqslant 1$, et montrons que Q_{n+1} est vraie.
     Par hypothèse de récurrence, on a donc
     $$1^2+2^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
     Comme précédemment, on a alors
     $$1^2+\ldots+n^2+(n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2 = (n+1)\left(\frac{n(2n+1)}{6}+(n+1)\right)$$
     soit
     $$1^2+\ldots+n^2+(n+1)^2 = (n+1)\frac{2n^2+n+6n+6}{6} = (n+1)\frac{2n^2+7n+6}{6}$$

Or, $(n+2)(2(n+1)+1)=(n+2)(2n+3)=2n^2+7n+6$. Donc,

$$1^2+\ldots+n^2+(n+1)^2=(n+1)\frac{(n+2)(2n+3)}{6}=\frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$$

Ainsi, la proposition Q_{n+1} est vraie, et la propriété Q est donc héréditaire.

D'après le principe de récurrence, la proposition Q_n est donc vraie pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\forall\ n \geqslant 1,\ \ 1^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

RÉFÉRENCE HISTORIQUE

Même si des traces de principe de récurrence ont été trouvées dans les travaux de Pascal (XVIIe siècle), ce sont **Richard Dedekind** en 1888 et indépendamment **Giuseppe Peano** en 1889 qui énoncent le principe de récurrence tel qu'on le connait.

Le raisonnement par récurrence est également utile pour démontrer des résultats de divisibilité.

Exemple 1.3

Montrer par récurrence que, pour tout entier n, $10^n-(-1)^n$ est un multiple de 11.

Solution

Soit $P(n)$ la proposition « $10^n-(-1)^n$ est un multiple de 11 »

- **initialisation** : pour $n=0$, $10^0-(-1)^0=0=0\times 11$.
- **hérédité** : supposons $P(n)$ vraie pour **un certain** n. On peut donc écrire $10^n-(-1)^n=11\times p$ où p est un nombre entier. On a alors

$$\begin{array}{rcl}
10^n & = & 11\times p+(-1)^n \\
10\times 10^n & = & 10\times 11\times p+10\times(-1)^n \\
10^{n+1} & = & 110p+10.(-1)^n \\
10^{n+1}-(-1)^{n+1} & = & 110p+10.(-1)^n-(-1)^{n+1} \\
10^{n+1}-(-1)^{n+1} & = & 11\times 10p+(-1)^n\,[10-(-1)] \\
10^{n+1}-(-1)^{n+1} & = & 11\times 10p+(-1)^n\times 11 \\
10^{n+1}-(-1)^{n+1} & = & 11\times\left[10p+(-1)^n\right]
\end{array}$$

Donc $10^{n+1}-(-1)^{n+1}$ est bien un multiple de 11 : $P(n+1)$ est vraie.

D'après le principe de récurrence, on a donc bien démontré $P(n)$ pour tout n.

2. Récurrence double, récurrence forte

Dans certains cas, la récurrence précédente ne peut être utilisée, car on a besoin de plus d'informations. On peut utiliser alors un des deux principes suivants :

Axiome 1.2. Principe de récurrence double

Soit $P(n)$ une proposition dépendant d'un entier n.

- Si $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies.
- et si, pour tout entier naturel n, $(P(n)$ et $P(n+1)) \Longrightarrow P(n+2)$

alors $P(n)$ est vraie pour tout entier n.

Axiome 1.3. Principe de récurrence forte

Soit $\mathrm{P}(n)$ une proposition dépendant d'un entier n.

- Si $\mathrm{P}(0)$ est vraie.
- et si, pour tout entier naturel n, $(\mathrm{P}(0), \mathrm{P}(1), \ldots, \mathrm{P}(n)) \Longrightarrow \mathrm{P}(n+1)$

alors $\mathrm{P}(n)$ est vraie pour tout entier n.

Remarque

On utilisera souvent la récurrence double lorsqu'une relation fait intervenir à la fois n, $n+1$ et $n+2$.

Exemple 1.4

Soit u la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = 1 + 2^n$.

Solution

Soit P la proposition définie pour tout entier n par $\mathrm{P}(n)$: « $u_n = 1 + 2^n$ » .

- **initialisation** : pour $n = 0$ on a $u_0 = 2 = 1 + 2^0$ et pour $n = 1$ on a $u_1 = 3 = 1 + 2^1$. Ainsi $\mathrm{P}(0)$ et $\mathrm{P}(1)$ sont vraies.
- **hérédité** : supposons que les propositions $\mathrm{P}(n)$ et $\mathrm{P}(n+1)$ sont vraies pour un certain entier n fixé. Par hypothèse de récurrence, on a donc que $u_n = 1 + 2^n$ et $u_{n+1} = 1 + 2^{n+1}$. Alors, par définition de u, on a

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 3u_{n+1} - 2u_n \\ &\underbrace{=}_{\text{H.R.}} 3(1+2^{n+1}) - 2(1+2^n) \\ &= 3 + 3.2^{n+1} - 2 - 2.2^n = 1 + 3.2^{n+1} - 2^{n+1} = 1 + 2.2^{n+1} = 1 + 2^{n+2} \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathrm{P}(n+2)$ est vraie.

D'après le principe de récurrence, la proposition P_n est donc vraie pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\forall\, n, \quad u_n = 1 + 2^n$$

☞ *Exercice 1.*

II. Raisonnement

1. Symboles mathématiques

Nous utiliserons très souvent plusieurs symboles mathématiques. Ils ne doivent être utilisés **que dans des phrases mathématiques** ! Ce ne sont pas des abréviations.

- $\forall$ signifie « pour tout » ou « quel que soit » .
- $\exists$ signifie « il existe » .
- $\exists!$ signifie « il existe un unique » .

On utilise / , | ou simplement « , » pour signifier « tel que » .

Exemple 1.5

$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists! y \in \mathbb{R},\ y = x + 1$ signifie : « pour tout réel x, il existe un unique réel y tel que $y = x + 1$ » .

Exercice 1.6

Traduire les phrases mathématiques suivantes :

- $\forall\ x \geqslant 0,\ \exists ! y \geqslant 0,\ y^2 = x$
- $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2+1 = x^2+x$

Solution

- La première se traduit par « pour tout réel x positif, il existe un unique y positif tel que $y^2 = x$ » . Ainsi, cette phrase traduit l'existence de $\sqrt{x}$ pour tout réel x positif.
- La deuxième se traduit par « il existe un réel x tel que $x^2+1 = x^2+x$ » . Elle traduit donc l'existence d'une solution à l'équation $x^2+1 = x^2+x$.

2. Négation

Définition 1.4.

La **négation** d'une proposition P est la proposition qui est vraie quand P est fausse, et qui est fausse quand P est vraie. On la note $\overline{\mathrm{P}}$.

Exemple 1.7

La négation de la proposition $x \geqslant 1$ est $x < 1$.

Proposition 1.1.

Lorsqu'on nie une proposition (on écrit sa **négation**), on échange quantificateur universel et quantificateur existentiel.

Remarque

La négation de $\forall\ x \in \mathbb{R}, \dots$ est donc $\exists\ x \in \mathbb{R}, \dots$. Ainsi, pour réfuter une proposition universelle, il suffit d'exhiber un **contre-exemple**.

Exercice 1.8

Déterminer la négation de la proposition : $\exists\ m \in \mathbb{R},\ \forall\ x \in \mathbb{R}, f(x) \geqslant m$.

Solution

La négation est : $\forall\ m \in \mathbb{R},\ \exists\ x \in \mathbb{R},\ f(x) < m$.

3. Implication et équivalence

Nous disposons aussi de certains connecteurs logiques :

- $\Longleftrightarrow$: c'est l'équivalence, le « si et seulement si » .
- $\Leftarrow$ et $\Rightarrow$: les implications.

Remarque

Lorsque l'on a $\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}$, on dit que B est la condition **nécessaire**, et A la condition **suffisante**. En effet, il **suffit** d'avoir A pour avoir B, et il est **nécessaire** d'avoir B si on a A.
Lorsqu'on a $\mathrm{A} \Longleftrightarrow \mathrm{B}$, A et B sont des conditions nécessaires et suffisantes.

Définition 1.5.

Si $A \Rightarrow B$ (sens direct), alors sa **réciproque** est $B \Rightarrow A$.
Si on a à la fois le sens direct et sa réciproque, on a alors l'équivalence.

Remarque

Ainsi, pour démontrer que certains résultats sont équivalents, on raisonnera par double implications : on démontrera tout d'abord que $A \Rightarrow B$, puis que $B \Rightarrow A$ pour conclure que A et B sont équivalentes.

4. Raisonnement direct, par contraposée, et par l'absurde

Théorème 1.2.

On a l'équivalence entre $A \Rightarrow B$ (raisonnement **direct**) et $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ (raisonnement **par contraposée**).
Pour démontrer un résultat du type $A \Rightarrow B$, il est souvent plus commode d'utiliser un raisonnement par contraposée : on suppose que l'on a $\overline{B}$ et on démontre qu'alors on a $\overline{A}$.

Exemple 1.9

Démontrer que $x \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 0$

Solution

Un raisonnement direct est compliqué à faire rigoureusement. En revanche, la contraposée de $x \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 0$ est $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$, qui est vrai. Donc on a bien $x \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 0$

Remarque

On peut enfin utiliser un raisonnement **par l'absurde** : si on veut montrer $A \Rightarrow B$, on suppose que l'on a A et $\overline{B}$ en même temps, et on essaie d'aboutir à une contradiction.

Exercice 1.10

Démontrer que $x \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 0$ par l'absurde.

Solution

Par l'absurde, on suppose que $x \neq 0$ et que $x^2 = 0$. Mais alors, si $x^2 = 0$, $x = 0$. Or $x \neq 0$: c'est absurde ! Ainsi, notre hypothèse de départ est fausse, et $x^2 \neq 0$.

5. Égalité

Méthode

Pour démontrer une égalité :

① on introduit les variables nécessaires avec les mots « soit » , ou « pour tout » , c'est-à-dire que l'on **quantifie** les variables.

② en partant d'un des deux membres, on aboutit à l'autre membre par des égalités successives.

③ on conclut.

Exemple 1.11

Montrer que pour tous réels a et b, $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$.

Solution

Soient a et b deux réels. Alors, en développant le membre de droite :

$$\begin{aligned}(a-b)(a^2+ab+b^2) &= a(a^2+ab+b^2) - b(a^2+ab+b^2)\\ &= a^3 + \cancel{a^2b} + \cancel{ab^2} - \cancel{ba^2} - \cancel{ab^2} - b^3\\ &= a^3 - b^3\end{aligned}$$

Ainsi, pour tous réels a et b, $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$.

6. Équation et inéquation

Lorsqu'on résout une équation ou une inéquation, il est important de raisonner par équivalence. Si on raisonne par implication, il est **nécessaire** de vérifier les résultats obtenus.

Pour résoudre une équation, on peut :

- partir de l'équation qu'on modifie (par équivalence) pour aboutir au résultat ;
- regroupe tous les termes dans un même membre, et on factorise ;
- ou enfin, on regroupe tous les termes dans un même membre, et on étudie une fonction.

Exemple 1.12

Résoudre dans $\mathbb{R}_+^*$ l'équation $\ln(x) = x - 1$.

Solution

L'équation s'écrit également $\ln(x) - x + 1 = 0$. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \ln(x) - x + 1$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et sa dérivée est

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$$

On obtient ainsi le tableau de signe et variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	||	$\nearrow$	0	$\searrow$	

Ainsi, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution : $x = 1$.

Méthode

Pour résoudre une inéquation :

① on quantifie les variables nécessaires avec les mots « soit », ou « pour tout ».

② on part de l'équation ou l'inéquation, et on résout en appliquant différentes propriétés par équivalence

③ ou alors on regroupe tous les termes dans un même membre, et on factorise, pour dresser un tableau de signe.

④ on conclut.

Rappel

Les propriétés suivantes n'ont pas à être justifiées.

- On ne modifie pas une équation en ajoutant un même nombre, en multipliant ou divisant par un même nombre *non nul*, en simplifiant ou en appliquant une fonction strictement monotone.
- Ajouter un terme à une inégalité ne change pas le sens de celle-ci, de même que multiplier l'inégalité par un même nombre positif. En revanche, multiplier par un nombre négatif une inégalité change le sens de celle-ci.

Quand on résout une inéquation, on justifiera **toutes** les étapes non triviales, par exemple en utilisant les variations d'une fonction.

Exemple 1.13

Résoudre l'inéquation $3x-3<1-2x$.

Solution

On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned} 3x-3<1-2x &\Longleftrightarrow 5x-3<1 \\ &\Longleftrightarrow 5x<4 \\ &\Longleftrightarrow x<\frac{4}{5} \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathscr{S}=\left]-\infty;\frac{4}{5}\right[$.

Remarque

On peut utiliser des mots en français (« c'est-à-dire » , « si et seulement si« , « soit ») pour remplacer le symbole $\Longleftrightarrow$, mais aussi pour l'implication (« donc » , « puis »...).

III. Ensembles

1. Ensembles et éléments

Définition 1.6.

On appelle **ensemble** toute *collection* d'objets, appelés **éléments** de cet ensemble.
Pour signifier que l'élément x appartient à un ensemble E, on note $x\in\mathrm{E}$. Si x n'appartient pas à E, on écrit $x\notin\mathrm{E}$.

Exemple 1.14

$\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R}$ sont des ensembles usuels. On a $\sqrt{2}\in\mathbb{R}$, mais $\sqrt{2}\notin\mathbb{Z}$.
$\{x_1,\dots,x_n\}$ est l'ensemble constitué uniquement de $x_1,\dots x_n$.

Définition 1.7.

L'ensemble constitué d'aucun élément est appelé **ensemble vide**, et est noté $\varnothing$.

Attention

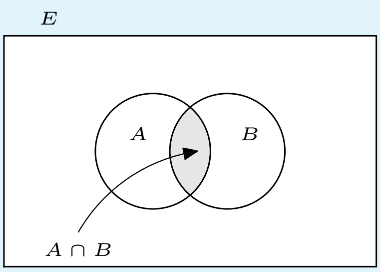
On note $\varnothing$ et non $\{\varnothing\}$. $\{\varnothing\}$ représente l'ensemble contenant l'ensemble vide.

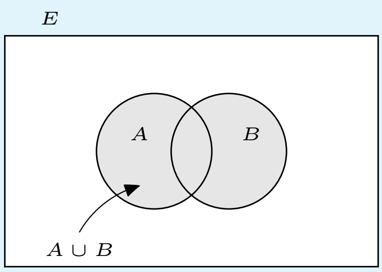
2. Union, intersection

Définition 1.8.

Soient E et F deux ensembles.

- On appelle **intersection** de E et de F, noté $E \cap F$, l'ensemble constitué des éléments qui sont à la fois dans E et dans F.
- On appelle **réunion** (ou **union**) de E et de F, noté $E \cup F$, l'ensemble constitué des éléments qui sont dans E ou dans F (voire dans les deux).





Exemple 1.15

Si $A = \{1;2;4\}$ et $B = \{2;4;5\}$ alors

$$A \cup B = \{1;2;4;5\} \quad \text{et} \quad A \cap B = \{2;4\}$$

3. Inclusion, sous-ensemble

Définition 1.9.

Soit E un ensemble. On dit que F est **inclus** dans E, et on note $F \subset E$, si tous les éléments de F sont aussi des éléments de E. On dit alors que F est une **partie** (ou un **sous-ensemble**) de E.

Exemple 1.16

$\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, $\{0,1\} \subset \{0,1,2\}$.

Définition 1.10.

Soit E un ensemble. On appelle **ensemble des parties** de E, et on note $\mathscr{P}(E)$, l'ensemble formé des sous-ensembles de E.

Exemple 1.17

On a $\mathscr{P}(\{a,b\}) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$.

Exercice 1.18

Déterminer $\mathscr{P}(\{a, b, c\})$.

Solution

Si $\mathrm{E} = \{a, b, c\}$, alors

$$\mathscr{P}(\mathrm{E}) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

Théorème 1.3.

Soit E un ensemble possédant n éléments (avec $n \geqslant 1$). Alors $\mathscr{P}(\mathrm{E})$ possède 2^n éléments.

Démonstration

Pour construire un sous-ensemble de E, il faut prendre certains éléments de E et pas d'autres. Si on note $x_1; \dots; x_n$ les éléments de E, alors pour chaque élément x_k, on peut soit le prendre, soit ne pas le prendre ; il y a donc 2 possibilités pour chaque élément. Puisqu'il y a n éléments, et que le choix se fait de manière indépendante, il y a donc

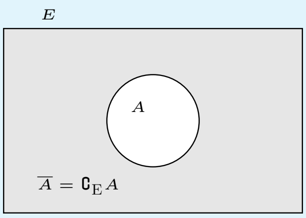
$$\underbrace{2 \times \dots \times 2}_{n \text{ fois}} = 2^n \text{ sous-parties}$$

☞ *Exercice 4.*

4. Complémentaire

Définition 1.11.

Soit E un ensemble et A un sous-ensemble de E. On appelle **complémentaire** de A, et on note $\overline{\mathrm{A}}$, l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans A : $\overline{\mathrm{A}} = \mathrm{E} \backslash \mathrm{A}$.



Exemple 1.19

Si $\mathrm{E} = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ et $\mathrm{A} = \{1; 2; 4\}$ alors $\overline{\mathrm{A}} = \{3; 5\}$.

Théorème 1.4. Lois de de Morgan

Soit E un ensemble, et soient A, B deux sous-ensembles de E.

- $\overline{\mathrm{A} \cup \mathrm{B}} = \overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{B}}$
- $\overline{\mathrm{A} \cap \mathrm{B}} = \overline{\mathrm{A}} \cup \overline{\mathrm{B}}$

Méthode

Pour montrer une égalité entre deux ensembles, on utilise la **double inclusion** : si $\mathrm{C} \subset \mathrm{D}$ et $\mathrm{D} \subset \mathrm{C}$ alors nécessairement $\mathrm{C} = \mathrm{D}$.

Démonstration

- Soit $x \in \overline{A \cup B}$. Cela veut dire qu'il n'est pas dans $A \cup B$. Donc il n'est ni dans A, ni dans B : il est donc dans $\overline{A} \cap \overline{B}$.
- Soit $\in \overline{A} \cap \overline{B}$. Il n'est donc pas dans A, et il n'est pas dans B : il n'est donc pas dans $A \cup B$. Ainsi, $x \in \overline{A \cup B}$.

L'autre égalité se montre de la même manière.

☞ *Exercices 2 et 3.*

5. Produit cartésien

Définition 1.12.

Soient E et F deux ensembles. On appelle **produit cartésien** de E et F, noté $E \times F$, l'ensemble formé des couples (a, b) avec $a \in E$ et $b \in F$.

Exemple 1.20

Si $E = \{a, b\}$ et $F = \{-1, 1\}$ alors $E \times F = \{(a, -1), (a, 1), (b, -1), (b, 1)\}$.

Remarque

- Si $E = F$, on note en général $E \times E = E^2$.
- On peut généraliser à un produit fini d'ensemble $E_1 \times \ldots \times E_n = \prod_{k=1}^{n} E_k$

Exemple 1.21

Les deux exemples classiques sont $\mathbb{R}^2 = \{(x, y), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ et

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n), \quad x_1 \in \mathbb{R}, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

Ainsi, par exemple, $(1; -4\sqrt{2}) \in \mathbb{R}^2$ et $(0; 0; 1) \in \mathbb{R}^3$.

IV. Applications

1. Définition

Définition 1.13.

Soient E et F deux ensembles. Une **application** (ou **fonction**) f de E vers F est une transformation qui, à chaque élément x de E, associe un unique élément y de F. L'élément y de F est alors noté $f(x)$ et est appelé **image** de x par f. x est alors un **antécédent** de $y = f(x)$ par f.
L'ensemble E est appelé **ensemble (ou domaine) de définition**.

Notation

On note $f : E \to F$ pour signifier que f est une application de E vers F.
L'ensemble des fonctions de E vers F est noté $\mathscr{F}(E, F)$.

Exemple 1.22

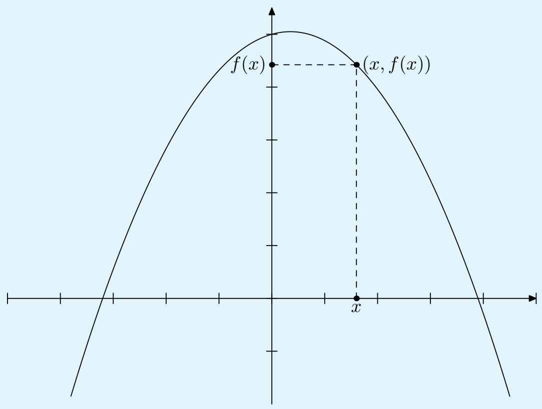
$\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^{-x^2} \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \frac{x+y}{1+x^2+y^2} \end{array}\right.$ sont des applications.

Remarque

Il y a, en réalité, une différence entre application et fonction. On peut parler généralement de la fonction logarithme népérien, sans indiquer qu'elle n'a pas de sens sur $\mathbb{R}^-$. En revanche, on parlera de l'application logarithme népérien définie sur $\mathbb{R}_*^+$. Dans la pratique, on utilisera quasi-systématiquement le mot fonction.

Définition 1.14.

L'ensemble des points du plan cartésien de coordonnées $(x, f(x))$ où x est un élément du domaine de définition de f est appelé **courbe représentative** de la fonction f.



Remarque

Si l'ensemble de définition d'une fonction n'est pas indiqué, il est convenu que cet ensemble de définition est le **plus grand ensemble** sur lequel $f(x)$ existe.

Exercice 1.23

Déterminer le domaine de définition de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2-4}$.

Solution

La fonction f est définie si et seulement si $x^2-4 \geqslant 0$. Puisque $x^2-4=(x-2)(x+2)$, et après tableau de signe rapide, on obtient $\mathscr{D}_f =]-\infty;-2] \cup [2;+\infty[$.

2. Opérations sur les fonctions

Définition 1.15.

Soient f et g deux fonctions définies sur le <u>même ensemble</u> E. Soit λ un réel.

- On appelle $f+g$ la fonction définie sur E par $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$.
- On appelle $f \times g$ la fonction définie sur E par $(f \times g)(x)=f(x)\times g(x)$.
- On appelle λf la fonction définie sur E par $(\lambda f)(x)=\lambda f(x)$.
- On appelle $f+\lambda$ la fonction définie sur E par $(f+\lambda)(x)=f(x)+\lambda$.
- Si g **ne s'annule pas** sur E, on appelle $\frac{f}{g}$ la fonction définie sur E par $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$.

Exemple 1.24

Soient f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x + 1$. Déterminer $f + g$ et $\frac{f}{g}$.

Solution

Par définition, $f + g$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $(f + g)(x) = x^2 + e^x + 1$ et $\frac{f}{g}$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\frac{f}{g}(x) = \frac{x^2}{e^x+1}$.

Définition 1.16.

Soit f une fonction définie sur E et prenant ses valeurs dans F.
Soit g une fonction définie sur F et à valeur dans G.
La fonction qui, à tout réel x de E, fait correspondre le réel $g(f(x))$ est appelée **fonction composée** de f suivie de g. On a ainsi

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{E} \longrightarrow & \mathrm{F} & \longrightarrow \mathrm{G} \\ x \longmapsto & f(x) & \longmapsto g(f(x)) \end{array}$$

Cette fonction est notée $g \circ f$.

Exemple 1.25

Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$ et $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x-1 \end{array} \right.$. Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$.

Solution

On a, pour tout réel x,

$$g \circ f(x) = x^2 - 1 \text{ et } f \circ g(x) = (x-1)^2$$

Remarque

Dans le résultat précédent, on remarque que $g \circ f \neq f \circ g$. On dit que la composée n'est pas **commutative**.

Méthode

Pour déterminer la composée de deux fonctions, on étudiera d'abord les domaines de définition pour déterminer le domaine de définition de la fonction composée.

Exemple 1.26

Soit $f : x \mapsto x^2 - 1$ et $g : x \mapsto \sqrt{x}$. Déterminer $g \circ f$.

Solution

$g \circ f(x)$ n'est définie que si $f(x) \geqslant 0$ (car g est la fonction racine, définie sur $\mathbb{R}^+$). Or

$$f(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$$

Ainsi, $g \circ f$ est définie sur $]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$ par $g \circ f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

Proposition 1.5. associativité

Si $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$, $g : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$, $h : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ sont trois fonctions, alors

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f = h \circ g \circ f$$

☞ *Exercices 5 et 6.*

3. Injection, surjection

a. Injection

Définition 1.17.

On dit qu'une fonction $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ est **injective** si f ne prend jamais deux fois la même valeur :

$$\forall (x, x') \in \mathrm{E}^2, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$$

Remarque

On dispose également de la formulation équivalente suivante (il s'agit de la contraposée de la précédente) :

$$\forall (x, x') \in \mathrm{E}^2, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$$

Méthode

Pour montrer qu'une fonction est injective, on prend deux éléments x et x' de E vérifiant $f(x) = f(x')$. On montre alors que nécessairement $x = x'$.

Exemple 1.27

Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{x+1}$ est injective.

Solution

En effet, soient $x, x' \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(x) = f(x')$. On a donc $\mathrm{e}^{x+1} = \mathrm{e}^{x'+1}$, c'est-à-dire $x+1 = x'+1$ en composant par la fonction logarithme népérien. On a donc bien $x = x'$.

Remarque

$f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ n'est pas injective si et seulement si

$$\exists (x, x') \in \mathrm{E}^2, f(x) = f(x') \text{ et } x \neq x'$$

Méthode

Pour montrer qu'une fonction n'est pas injective, on cherche un contre-exemple.

Exemple 1.28

Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ n'est pas injective.

Solution

En effet, $1 \neq -1$ et pourtant $1^2 = (-1)^2 = 1$.

Théorème 1.6.

Si $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ et $g : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ sont deux applications injectives, alors $g \circ f : \mathrm{E} \to \mathrm{G}$ est aussi injective.

Démonstration

Soient x et x' deux éléments de E tels que $g \circ f(x) = g \circ f(x')$. Alors, puisque $g(f(x)) = g(f(x'))$, et comme g est injective, on a nécessairement $f(x) = f(x')$. Or, f est aussi injective : on a donc $x = x'$. $g \circ f$ est bien injective.

b. Surjection

Définition 1.18.

On dit qu'une fonction $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ est **surjective** si tout élément de F possède au moins un antécédent par f dans E :

$$\forall\, y \in \mathrm{F}, \exists\, x \in \mathrm{E}, y = f(x)$$

Méthode

Pour prouver qu'une fonction f est surjective, il suffit donc de trouver une solution x à l'équation $f(x) = y$ pour tout élément y de F.

Exemple 1.29

Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie pour tout x par $f(x) = 2x - 1$ est surjective.

Solution

En effet, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $y = f(x) \Leftrightarrow x = \frac{y+1}{2}$. Il existe donc au moins un antécédent à y par la fonction f.

Méthode

Pour montrer qu'une fonction n'est pas surjective, on exhibe une valeur qui ne peut être atteinte par la fonction.

Exemple 1.30

Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie pour tout réel x par $f(x) = \mathrm{e}^x$ n'est pas surjective.

Solution

Puisque, pour tout réel x, $\mathrm{e}^x > 0$, la valeur 0 n'est jamais atteinte par f. Ainsi, f n'est pas surjective.

Remarque

On constate cependant que la fonction précédente est surjective sur $\mathbb{R}_+^*$.

Théorème 1.7.

Si $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ et $g : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ sont deux applications surjectives, alors $g \circ f : \mathrm{E} \to \mathrm{G}$ est aussi surjective.

Démonstration

Soit z un élément de G. Puisque g est surjective, il existe un élément $y \in \mathrm{F}$ tel que $g(y) = z$. De plus, f est surjective, donc il existe un élément $x \in \mathrm{E}$ tel que $f(x) = y$. Mais alors

$$g(f(x)) = g(y) = z$$

Donc x est un antécédent de z par la fonction $g \circ f$.

c. Bijection

Définition 1.19.

On dit qu'une fonction $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ est **bijective** si elle est à la fois injective et surjective. Ainsi, f est bijective si, et seulement si, chaque élément de F possède un **unique antécédent** par f dans E :

$$\forall\, y \in \mathrm{F}, \exists!\, x \in \mathrm{E},\, y = f(x)$$

Méthode

Pour démontrer qu'une fonction $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ est bijective, il faut montrer que, pour tout $y \in \mathrm{F}$, l'équation $f(x) = y$ possède une **unique** solution dans E.

Exemple 1.31

Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 4$ est bijective.

Solution

En effet, pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x) = y \Leftrightarrow x - 4 = y \Leftrightarrow x = y + 4$$

Il existe donc bien un unique antécédent à y par f.

Exemple 1.32

L'application $\mathrm{id}_\mathrm{E} : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ définie pour tout x de E par $\mathrm{id}_\mathrm{E}(x) = x$ est une bijection de E dans E.

Proposition 1.8.

La fonction id_E est le neutre pour la composition :

$$\forall\, f \in \mathscr{F}(\mathrm{E},\mathrm{F}),\ \forall\, g \in \mathscr{F}\mathrm{F},\mathrm{E}, \quad f \circ \mathrm{id}_\mathrm{E} = \mathrm{id}_\mathrm{E} \circ g = g$$

Démonstration

En effet, pour tout $x \in \mathrm{E}$:

$$f \circ \mathrm{id}_\mathrm{E}(x) = f(\mathrm{id}_\mathrm{E}(x)) = f(x) \text{ car } \mathrm{id}_\mathrm{E}(x) = x$$

et pour tout $x \in \mathrm{F}$:

$$\mathrm{id}_\mathrm{E} \circ g(x) = \mathrm{id}_\mathrm{E}(g(x)) = g(x) \text{ car } \mathrm{id}_\mathrm{E}(u) = u \text{ avec ici } u = g(x)$$

Théorème 1.9.

Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une fonction. f est bijective si, et seulement si, il existe une unique fonction ···

$g : \mathrm{F} \to \mathrm{E}$, telle que $f \circ g = \mathrm{id}_\mathrm{F}$ et $g \circ f = \mathrm{id}_\mathrm{E}$.
La fonction g est appelée **fonction réciproque** de f, et est notée $g = f^{-1}$.

Exemple 1.33

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f : x \mapsto 2x-1$. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g : x \mapsto \frac{x+1}{2}$. Montrer que f et g sont bijectives, et réciproques l'une de l'autre.

Solution

On constate que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f \circ g(x) = 2\frac{x+1}{2} - 1 = x \text{ et } g \circ f(x) = \frac{(2x-1)+1}{2} = x$$

Ainsi, f est bijective, et sa bijection réciproque est la fonction g.

Méthode

Pour déterminer la fonction réciproque d'une fonction f, on résout l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x. On obtiendra $x = g(y)$ et g représente alors la fonction réciproque.

Exemple 1.34

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = \mathrm{e}^{x+1}$. Déterminer f^{-1}.

Solution

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}_+^*$. Alors

$$f(x) = y \Leftrightarrow \mathrm{e}^{x+1} = y \Leftrightarrow x = \ln(y) - 1$$

qui a un sens car $y > 0$. Ainsi $x = g(y)$ avec $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie pour tout réel $x > 0$ par $g(x) = \ln(x) - 1$. Donc $f^{-1} = g$.

Méthode

Lorsqu'on donne f et g et qu'on demande de montrer que $g = f^{-1}$, il suffit de montrer que $f \circ g = \mathrm{id}$ et $g \circ f = \mathrm{id}$.

Exemple 1.35

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x - 2$. Montrer que f^{-1} est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f^{-1}(y) = \frac{y+2}{4}$.

Solution

Notons $g : y \mapsto \frac{y+2}{4}$. Alors, pour tous réels x et y, on a

$$f \circ g(y) = f\left(\frac{y+2}{4}\right) = 4\left(\frac{y+2}{4}\right) - 2 = y$$

$$g \circ f(x) = g(4x-2) = \frac{(4x-2)+2}{4} = x$$

Ainsi, on a bien $f \circ g = \mathrm{I}d_\mathbb{R}$ et $g \circ f = \mathrm{I}d_\mathbb{R}$: $g = f^{-1}$.

Théorème 1.10.

Soient $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ et $g : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ deux fonctions bijectives. Alors $g \circ f : \mathrm{E} \to \mathrm{G}$ est bijective, et on a

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Démonstration

En effet,

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ g^{-1} \circ g \circ f = f^{-1} \circ \mathrm{id}_\mathrm{F} \circ f = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_\mathrm{E}$$

et

$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ f \circ f^{-1} \circ g^{-1} = g \circ \mathrm{id}_\mathrm{F} \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = \mathrm{id}_\mathrm{G}$$

D'après le théorème précédent, $g \circ f$ est bijective, d'application réciproque $f^{-1} \circ g^{-1}$.

☞ *Exercice 7.*

4. Image directe, image réciproque

Définition 1.20.

Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une fonction.

- Si $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$, on appelle **image directe** de A par f, et on note $f(\mathrm{A})$, l'ensemble composé par les images par f des éléments de A :
$$f(\mathrm{A}) = \left\{ y \in \mathrm{F},\ \exists x \in \mathrm{A}, f(x) = y \right\}$$
- Si $\mathrm{B} \subset \mathrm{F}$, on appelle **image réciproque** de B par f, et on note $f^{-1}(\mathrm{B})$, l'ensemble composé par les antécédents par f des éléments de B :
$$f^{-1}(\mathrm{B}) = \left\{ x \in \mathrm{E},\ f(x) \in \mathrm{B} \right\}$$

Exemple 1.36

Soit $f : x \mapsto x + 2$. Déterminer $f([0;1])$ et $f^{-1}([0;1])$.

Solution

On a :

$$f([0;1]) = [2;3] \quad \text{et} \quad f^{-1}(([0;1]) = [-2;-1]$$

⚠ **Attention**

On ne confondra pas l'image réciproque d'un ensemble $f^{-1}(\mathrm{B})$ et l'application réciproque d'une application f^{-1} lorsque celle-ci existe.

Proposition 1.11.

Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une application. f est surjective si et seulement si $f(\mathrm{E}) = \mathrm{F}$.

Démonstration

Si f est surjective, tout élément de F admet au moins un antécédent dans E. Donc $f(\mathrm{E}) = \mathrm{F}$.
Réciproquement, si $f(\mathrm{E}) = \mathrm{F}$, alors pour tout élément $y \in \mathrm{F}$, il existe un $x \in \mathrm{E}$ tel que $f(x) = y$: par définition, f est surjective.

☞ *Exercice 8.*

5. Restriction

Définition 1.21.

Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une fonction, et $\mathrm{G} \subset \mathrm{E}$. On appelle **restriction** de f à G, et on note $f|_{\mathrm{G}}$ l'application définie sur G par

$$\forall\, x \in \mathrm{G},\ f|_{\mathrm{G}}(x) = f(x)$$

Exemple 1.37

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout réel x par $f(x) = x^2$. f n'est pas injective. En revanche, $f|_{\mathbb{R}^+}$ est injective.

Exercices

Exercices

Récurrences

●○○ **Exercice 1 Récurrences** (40 min.)

Démontrer par récurrence les résultats suivants :

1. $\forall\, n \geqslant 1, \quad 1^3+2^3+\cdots+n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$
2. Si a est un réel fixé $a \geqslant -1$,
$$\forall\, n, \quad (1+a)^n \geqslant 1+na \qquad \text{(inégalité de Bernoulli)}$$
3. Si u est la suite définie par $u_0 = 7$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = 2u_n - 3$, alors
$$\forall\, n, \quad u_n = 2^{n+2}+3$$
4. Si $q \neq 1$, alors
$$\forall\, n, \quad 1+q+\cdots+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$
5. $\forall\, n \geqslant 1, \quad 1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$

Ensemble

●○○ **Exercice 2 Ensembles** (5 min.)

Soient les ensembles suivants :
$$A = \{1,2,3,4,5,6,7\}, \quad B = \{1,3,5,7\}, \quad C = \{2,4,6\}, \quad \text{et} \quad D = \{3,6\}$$
Déterminer $B\cap D, C\cap D, B\cup C, B\cup D$. Déterminer les complémentaires dans A de B, C et D.

●●○ **Exercice 3 Lois de de Morgan et distributivités** (10 min.)

Soient E un ensemble, et A, B et C des sous-ensembles de E. Montrer par double inclusion les résultats suivants :

- $\overline{A\cup B} = \overline{A}\cap\overline{B}$
- $\overline{A\cap B} = \overline{A}\cup\overline{B}$
- $A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$
- $A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$.

●○○ **Exercice 4 Ensemble des parties** (5 min.)

Déterminer les éléments de $\mathscr{P}(\{0,1,2\})$

Fonctions

●○○ **Exercice 5 Composées** (10 min.)

On considère les fonctions $f : x \mapsto x^2, g : x \mapsto \sqrt{x}$ et $h : x \mapsto x-2$. Déterminer l'ensemble de définition et l'expression des fonctions suivantes :
$$f\circ g, f\circ h, g\circ h, h\circ f, h\circ g, g\circ f$$

●○○ Exercice 6 Composées (5 min.)

Soit $f : x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$ et $g : x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$. Déterminer quatre fonctions u, v, w, et z telles que $f = u \circ v$ et $g = w \circ z$.

●●○ Exercice 7 Injectivité, surjectivité, bijectivité (15 min.)

Déterminer si les fonctions suivantes sont injectives, surjectives, bijectives.

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 1$.
- $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x > 0$ par $g(x) = \mathrm{e}^{3+\ln(x)}$
- $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $h(x) = \dfrac{1}{x^3+1}$

●○○ Exercice 8 Image directe, image réciproque (5 min.)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto \mathrm{e}^{x+1}$.
Déterminer l'image directe par f de $[0;1]$. Déterminer l'image réciproque par f de $\mathbb{R}^+$ et de $[1;\mathrm{e}]$.